

$$e) x \mapsto \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f) x \mapsto \sqrt{\frac{|1-x|}{x^2+1}}$$

Branches infinies

14 Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)^2}$$

$$b) x \mapsto \frac{2x^2 - 1}{x-1}$$

$$c) x \mapsto \sqrt{(x+2)^2} - \frac{3}{x-1}$$

$$d) x \mapsto \frac{x^2 + \sin x}{x}$$

15 Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto x \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

$$b) x \mapsto x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$c) x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$$

$$d) x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

16 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$; donner une équation de ces asymptotes et préciser leur position par rapport à ($\mathcal{C}$).

$$a) f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$b) f(x) = \frac{x+1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

17 Soit a et b deux nombres réels, f la fonction définie par : $f(x) = ax + b - \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.

(On discutera suivant les valeurs de a .)

2. Déterminer a et b pour que la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ soit asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Fonctions continues sur un intervalle

18 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$.

1. Calculer la limite en 1 de la fonction f .

2. En déduire une fonction g , prolongement par continuité de f en 1.

19 Dans chacun des cas suivants démontrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

$$a) f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

$$b) f: x \mapsto |2x-5|$$

$$c) f: x \mapsto \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + 1}$$

$$d) f: x \mapsto \sqrt{\tan^2 x + 1}$$

20 Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$.

1. Étudier la continuité de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

2. Justifier que : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \geq -2$.

3. Démontrer que tout élément β de $[-2; +\infty[$ a un antécédent α dans $[1; +\infty[$; en déduire l'image par f de l'intervalle $[1; +\infty[$.

21 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto E(x) + [x - E(x)]^2$, où E désigne la fonction partie entière.

22 Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-x}{x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = a \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ f(1) = a \end{cases}$$

23 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$a) f: x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$b) g: x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$$

24 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble $f(K)$.

$$a) f: x \mapsto x^2 - 4x + 2 \quad K = [-2; 4]$$

$$b) f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 \quad K = [-1; 3]$$

$$c) f: x \mapsto \frac{-x+1}{2x+1} \quad K = [-1; +\infty[$$

$$d) f: x \mapsto \sqrt{2x^2-1} \quad K = [-1; 1].$$

25 1. Démontrer que l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$ a une unique solution réelle.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

26 1. Démontrer que l'équation $\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

27 Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit f la fonction de $[0; \pi]$ vers $[0; 2]$ définie par : $f(x) = 1 + \cos x$.

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur $[0; 2]$ et préciser son sens de variation.

2. Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} .

28 1. Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \tan x$, de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ vers $\mathbb{R}$, est une bijection.

2. Établir le tableau de variation de la fonction f^{-1} .

29 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

1. Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ réalise une bijection de $]0; \pi[$ vers un intervalle que l'on précisera.

2. Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} .

30 Écrire sous la forme a^q ($a \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}$).

$$a) \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$b) \frac{4\sqrt[3]{4} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$$

d) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{1\,875} - \sqrt[3]{243}$

e) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{1\,875} + \sqrt[3]{243}$.

31 Soit a, b, c des nombres réels strictement positifs. Écrire plus simplement les expressions suivantes.

a) $\frac{a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{5}}}{5\sqrt{a} \times \sqrt[5]{\frac{1}{b}}} \times \sqrt[15]{a^8 b^8}$

b) $\left(a^2 + a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{4}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

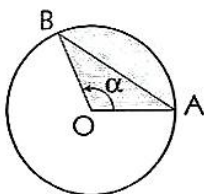
APPROFONDISSEMENT

32 Soit f une fonction telle que pour tout nombres réels a et b : $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

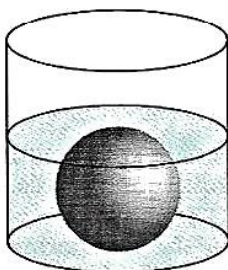
33 A et B sont deux points distincts d'un cercle de centre O et de rayon 1. On désigne par x la mesure en radian de l'angle AOB.

1. Démontrer qu'il existe une unique valeur α de x pour laquelle le triangle AOB et la portion de disque comprise entre l'arc $\widehat{AB}$ et la corde [AB] ont la même aire.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α .



34 Une boîte cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. Déterminer à 0,1 mm près le rayon de cette boule.



35 1. Étudier la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ et tracer sa courbe représentative (C).

2. En déduire que l'équation $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2 = 0$ admet une unique solution réelle.

3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.

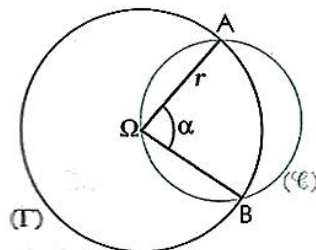
36 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$.

1. Étudier les variations de f .

2. Préciser le nombre de solutions des équations suivantes et déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune d'elles :

a) $f(x) = 1,1$ b) $f(x) = 0,75$ c) $f(x) = -0,5$.

37 (C) est un cercle de rayon 1 et Ω un point de (C). (Γ) est un cercle de centre Ω et de rayon r ($0 < r < 2$). On désigne par A et B les points d'intersection de (C) et (Γ), par α la mesure en radian de l'angle AΩB et par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie commune aux deux disques délimités par (C) et (Γ).



On se propose de déterminer r pour que $\mathcal{A}(\alpha)$ soit égale à la moitié de l'aire du disque délimité par (C).

1. Démontrer que :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \pi + \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \quad \text{et} \quad r = 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

2. a) Démontrer que l'équation $\sin x - x \cos x = \frac{\pi}{2}$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; \pi]$ et déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

b) Démontrer que la fonction $x \mapsto \cos \frac{x}{2}$ est une bijection de $[0; \pi]$ sur $[0; 1]$ et en déduire une valeur approchée de r .

38 1. On considère l'équation

$$(E) : |x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Démontrer que (E) admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 telles que :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

2. Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, on pose : $u_i = \frac{3}{2}(x_i - \frac{1}{3})$.

Démontrer qu'il existe un unique nombre réel θ_i élément de $[0; \pi]$ tel que : $u_i = \cos \theta_i$.

3. a) Démontrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont les solutions dans $[0; \pi]$ de l'équation : $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$.

b) En déduire les solutions de (E).

39 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{3x^3 - 4x^2 - 4x + 8}{4x - 8}$

et (C) sa courbe représentative.

1. Démontrer que (C) admet une asymptote parallèle à (O).

2. a) Étudier le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

b) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x-2}.$$

En déduire que (C) est asymptote à une parabole (P) dont on donnera une équation.

Étudier les positions relatives de (C) et (P).

3. a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) À l'aide de ce tableau, démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique et déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

40 1. Démontrer que l'équation $x^5 - 209x + 56 = 0$ admet trois solutions réelles, dont on donnera le signe.

2. a) Démontrer que deux de ces solutions ont pour produit 1 et calculer leur somme.

b) En déduire ces deux solutions.

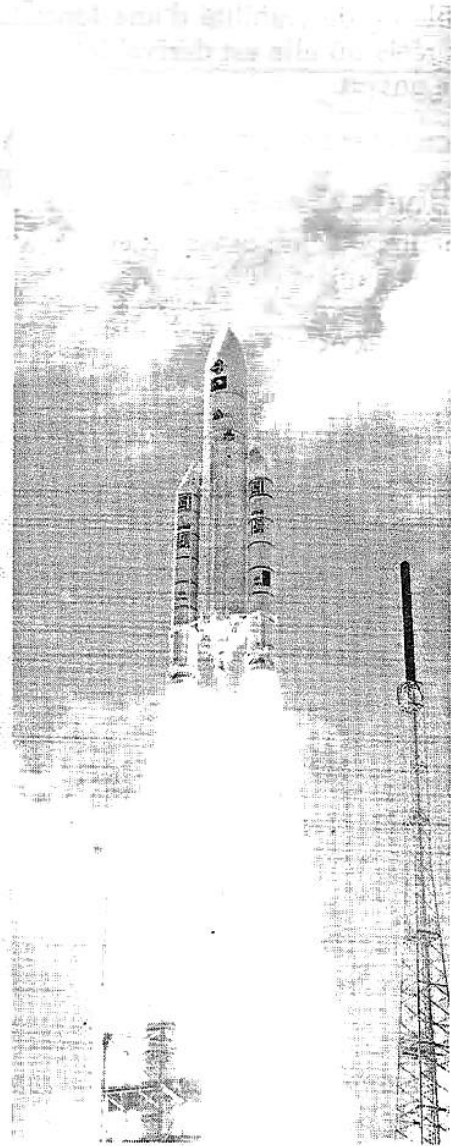
3. En procédant par dichotomie, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la troisième solution.

Dérivation – Études de fonctions

Introduction

Ce chapitre complète l'étude des dérivées qui a été vue en classe de première.

Le calcul de la dérivée de fonctions composées et de la réciproque d'une fonction, l'inégalité des accroissements finis, les dérivées successives permettent la détermination de la tangente en un point d'une courbe, l'approximation locale d'une fonction, ses variations sur l'ensemble de définition et la construction de sa courbe représentative, ainsi que l'analyse de certaines propriétés.



© ESA/CNES/Airbuspace - service optique CSG.

SOMMAIRE

1. Dérivation.....	214
2. Études de fonctions.....	221

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variable réelle et le plan est muni du repère (O, I, J) .

1 Dérivation

1.1. Fonctions dérivées

Dérivabilité sur un intervalle

L'ensemble de dérivabilité d'une fonction a été défini, en classe de première, comme l'ensemble des nombres réels où elle est dérivable ; ceci nous a permis d'étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle ouvert.

Nous allons étendre cette notion à un intervalle quelconque.

Définition

Une fonction f de $[a ; b]$ vers $\mathbb{R}$ est dérivable sur $[a ; b]$ si elle est dérivable sur $]a ; b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b .

On pose : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.

On définit de façon analogue une fonction dérivable sur un intervalle semi-ouvert.

Exemples

• La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 1\sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = 0$; donc, la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

• La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$; donc, la fonction g n'est pas dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

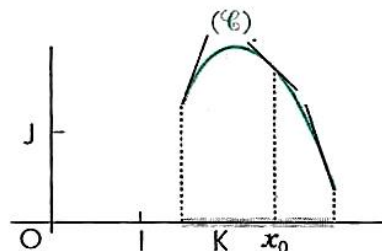
Remarques

• Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Lorsque f est dérivable sur un intervalle K , on sait que $(\mathcal{C})$ admet, en tout point d'abscisse x_0 élément de K , une tangente (ou une demi-tangente) non parallèle à (OJ) .

Réciproquement, nous admettons que si $(\mathcal{C})$ admet en un point d'abscisse x_0 une tangente non parallèle à (OJ) , alors f est dérivable en x_0 .

• Lorsqu'une fonction est dérivable en tout élément d'un ensemble E , on dit qu'elle est dérivable sur E .



Une fonction dérivable en un nombre réel x_0 est continue en x_0 . On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Une fonction dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle.

Dérivées usuelles

• Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$, si $n < 0$ $\mathbb{R}$, si $n > 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

• Dérivées et opérations sur les fonctions

f	f'
$u + v$	$u' + v'$
ku ($k \in \mathbb{R}$)	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax + b)$	$x \mapsto au'(ax + b)$

Remarques

Les dérivées des fonctions $x \mapsto x^n$ et u^n ont été établies en classe de première pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

• Lorsque $n = 1$, la fonction $x \mapsto x$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto 1$, c'est à dire le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto 1x^0$.

• Lorsque $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $(u^n)' = \left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-n}\right)' = -n\left(\frac{1}{u}\right)' \left(\frac{1}{u}\right)^{-n-1} = -n\left(-\frac{u'}{u^2}\right)u^{n+1} = nu'u^{n-1}$.

Les formules de dérivation, pour les fonctions $x \mapsto x^n$ et u^n , sont ainsi étendues à $n \in \mathbb{Z}^*$.

1.2. Dérivée de fonctions composées

Dérivée de la composée de deux fonctions

On a établi en classe de première la dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction f . On admet la propriété suivante qui généralise ce résultat à la composée de deux fonctions dérivables.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur K et on a : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Exemple

Soit la fonction $f: x \mapsto \cos \frac{1}{1-x}$.

On considère les fonctions $u: x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $v: x \mapsto \cos x$; on a : $f = v \circ u$.

La fonction u est dérivable sur $] -\infty ; 1[$ et $u(]-\infty ; 1[) =]0 ; +\infty[$;

la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ qui contient $]0 ; +\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $] -\infty ; 1[$.

On démontre de même que f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = \frac{-1}{(1-x)^2} \sin \frac{1}{1-x}$.

Remarque

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles tous non réduits à un point. Si f est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, alors f est dérivable sur son ensemble de définition.

Dérivée de la réciproque d'une fonction

Dans ce paragraphe, le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K , telle que : $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$.
 f est continue sur K ; donc, f réalise une bijection de K vers $f(K)$ et admet une bijection réciproque f^{-1} de $f(K)$ vers K .

On désigne par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les représentations graphiques respectives de f et de f^{-1} , par (Δ) la droite d'équation : $y = x$. Les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à (Δ) .

- Étudions la dérivabilité de f^{-1} sur $f(K)$.

Soit x_0 un élément de $f(K)$ et M'_0 le point de $(\mathcal{C}')$ d'abscisse x_0 .

Le point M_0 , symétrique de M'_0 par rapport à (Δ) , appartient à $(\mathcal{C})$ et a pour abscisse $f^{-1}(x_0)$.

On désigne par (T) la tangente (ou la demi-tangente) à $(\mathcal{C})$ en M_0 .

Toute symétrie orthogonale conserve le contact ; donc $(\mathcal{C}')$ admet pour tangente (ou demi-tangente) en M'_0 la droite (T') , symétrique de (T) par rapport à (Δ) .

De plus, (T) n'est pas parallèle à (OI) car f' ne s'annule pas sur K ; donc, (T') n'est pas parallèle à (OJ) .

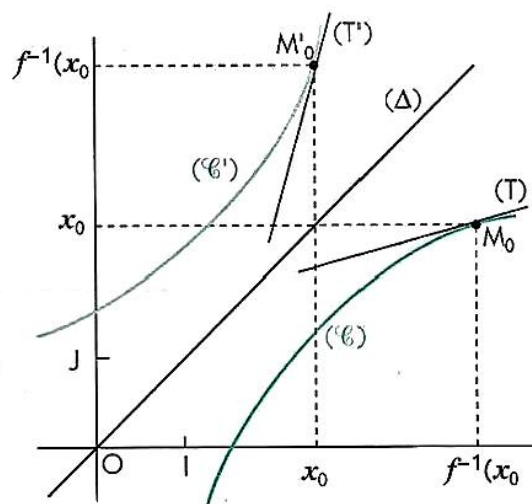
On en déduit que la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(K)$.

- Déterminons la fonction dérivée de f^{-1} sur $f(K)$.

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, on a : $(f \circ f^{-1})' = (f^{-1})' \times f' \circ f^{-1}$.

Or : $(f \circ f^{-1}) = \text{Id}_{f(K)}$; donc : $\forall x \in f(K), (f \circ f^{-1})'(x) = 1$.

On en déduit que : $\forall x \in f(K), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$.



Cette étude justifie la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K , telle que : $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$.

- La fonction f réalise une bijection de K vers $f(K)$.

- La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque

S'il existe x_0 élément de $f(K)$ tel que $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en x_0 et $(\mathcal{C}')$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente (ou demi-tangente) parallèle à (OJ) .

Exemple

Soit f la fonction de $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \tan x$.

f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $f(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$;

de plus : $\forall x \in] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + [f(x)]^2$.

Donc : $\forall x \in] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$; on en déduit que f est bijective et f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + [f(f^{-1}(x))]^2} = \frac{1}{1 + x^2}$.

La fonction réciproque de la fonction tangente est appelée fonction arctangente et notée sur les calculatrices $\tan^{-1}$ ou Atn .

Dérivées des fonctions $x \mapsto x^r$ et u^r ($r \in \mathbb{Q}^*$)

• Soit f la fonction de $]0; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$ définie par : $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

f est bijective et sa bijection réciproque est la fonction $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

Or, $f'(0) = 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) \neq 0$.

On en déduit que f^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

• Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$).

Il existe deux nombres p et q tels que : $p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*$ et $r = \frac{p}{q}$.

On a : $\forall x \in]0; +\infty[, x^r = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$.

g est la composée des fonctions $u : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ et $v : x \mapsto x^p$.

Ces fonctions sont dérivables sur $]0; +\infty[$; donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \right] \times \left[p \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^{p-1} \right] \left[\frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \right] \times \left[p \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^{p-1} \right] \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}. \end{aligned}$$

Cette étude justifie les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit r un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

• La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$.

• La fonction u^r est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction $ru'u^{r-1}$.

La seconde propriété se déduit de la première à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.
- La fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.
- La fonction $x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$.

Remarque

La fonction $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$) est dérivable en 0 si et seulement si $r \geq 1$.

1.3. Inégalité des accroissements finis

Si un cyclomotoriste roule à une vitesse comprise entre 30 km/h et 50 km/h, la distance qu'il parcourt en 2 heures est comprise entre 60 km et 100 km.

Cette situation est une illustration concrète de la propriété suivante.

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a < b$).

S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,

alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Cette propriété est appelée inégalité des accroissements finis.

Démonstration.

Soit g la fonction de K vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = Mx - f(x)$.

La fonction g est dérivable sur K et on a : $\forall x \in K, g'(x) = M - f'(x)$; donc g' est positive sur $[a ; b]$.

La fonction g est croissante sur $[a ; b]$; donc : $g(a) \leq g(b)$.

On en déduit que : $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$; donc : $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ (1).

En considérant la fonction h de K vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = mx - f(x)$, on démontre de façon analogue que : $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$ (2).

Des inégalités (1) et (2), on déduit que : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K .

S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de $[a ; b]$, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous a et b éléments de K , on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Cette propriété est une autre formulation de l'inégalité des accroissements finis ; elle se déduit de la précédente en remplaçant m par $-M$.

Exemples

• Démontrer que : $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[, x \leq \tan x$.

Soit f la fonction de $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(t) = \tan t$.

On a : $\forall t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[, f'(t) = 1 + \tan^2 t$; donc : $\forall t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[, 1 \leq f'(t)$.

Soit x un élément de $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0 ; x]$,

on obtient : $1 \times |x - 0| \leq |f(x) - f(0)|$;

c'est-à-dire : $x \leq \tan x$.

• Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Soit g la fonction définie par : $g(t) = \sin t$.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \cos t$; donc : $\forall t \in \mathbb{R}, |g'(t)| \leq 1$.

Soit x un nombre réel.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g sur l'intervalle $[x ; 0]$ ou l'intervalle $[0 ; x]$,

on obtient : $|g(x) - g(0)| \leq 1 \times |x - 0|$;

c'est-à-dire : $|\sin x| \leq |x|$.

1.4. Dérivées successives et applications

Dérivées successives d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction et K un intervalle.

- Si f est dérivable sur K , sa dérivée f' est appelée dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$.
- Si f' est dérivable sur K , sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$.
- De proche en proche, la fonction dérivée n -ième de f sur K , si elle existe, est la dérivée de la fonction dérivée $(n - 1)$ -ième de f sur K ; on la note $f^{(n)}$.

$f^{(n)}$ est aussi appelée dérivée d'ordre n de la fonction f .

On utilise également, notamment en sciences physiques, la notation de Leibnitz :

$f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont notées respectivement $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^nf}{dx^n}$.

Exemples

• Déterminer les dérivées successives de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.

On a : $f'(x) = x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 2x - 4$; $f^{(3)}(x) = 2$; $f^{(4)}(x) = 0$.

Donc, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 4, on a : $f^{(n)}(x) = 0$.

• Déterminer la dérivée n -ième de la fonction $g: x \mapsto \sin x$.

On a : $g'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

$$g''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) ;$$

$$g^{(3)}(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Démontrons cette égalité par récurrence.

– L'égalité est vraie pour $n = 1$.

– Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k , c'est-à-dire : $g^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

on en déduit que : $g^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

donc, l'égalité est vraie pour $k+1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

Position relative d'une courbe et de ses tangentes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K et x_0 un élément de K .

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et par (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point M_0 d'abscisse x_0 .

(T) a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

On se propose de déterminer la position relative de $(\mathcal{C})$ et (T) sur l'intervalle K .

Pour cela, on considère la fonction $g: x \mapsto f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$.

On a : $g(x_0) = 0$;

$\forall x \in K, g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$; donc : $g'(x_0) = 0$.

• Si f'' est strictement positive sur K , alors f' est strictement croissante sur K .

Soit x un élément de K .

On a : $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0)$; c'est-à-dire : $x < x_0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

De même, on a : $x > x_0 \Rightarrow g'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de g sur l'intervalle K .

Donc : $\forall x \in K \setminus \{x_0\}, g(x) > 0$.

$(\mathcal{C})$ est au-dessus de (T) sur l'intervalle K .

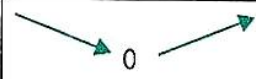
On dit que f est convexe sur K (figure 1).

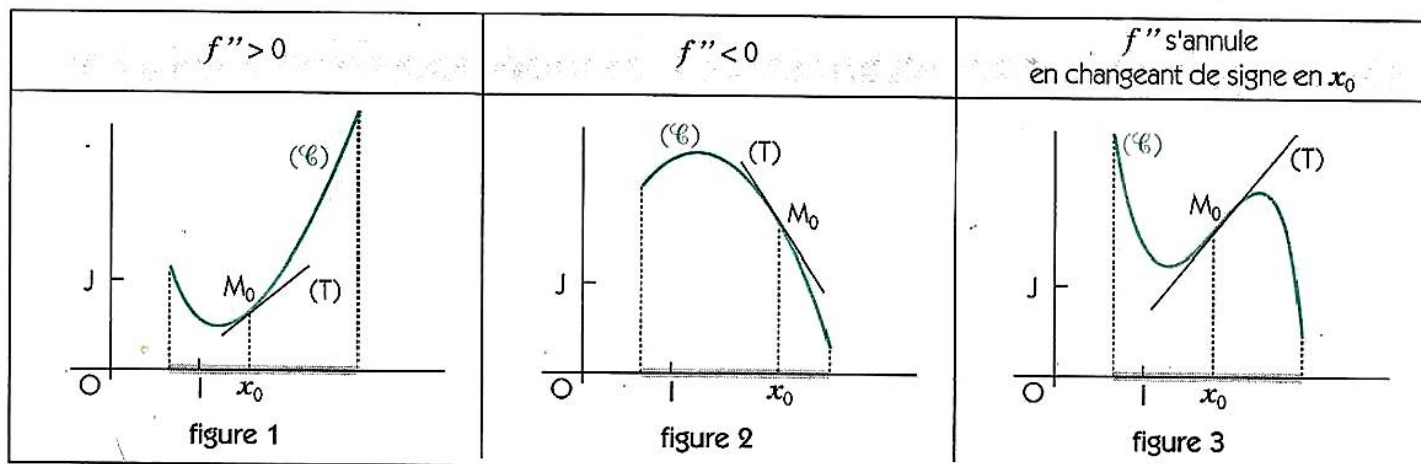
• On démontre de même que si f'' est strictement négative sur K , alors $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (T) sur K .

On dit alors que f est concave sur K (figure 2).

• Si f'' s'annule et change de signe en x_0 , la droite (T) « traverse » la courbe $(\mathcal{C})$ en M_0 .

On dit que M_0 est un point d'inflexion (figure 3).

x	x_0
$g'(x)$	- 0 +
$g(x)$	



Exemple

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{3}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

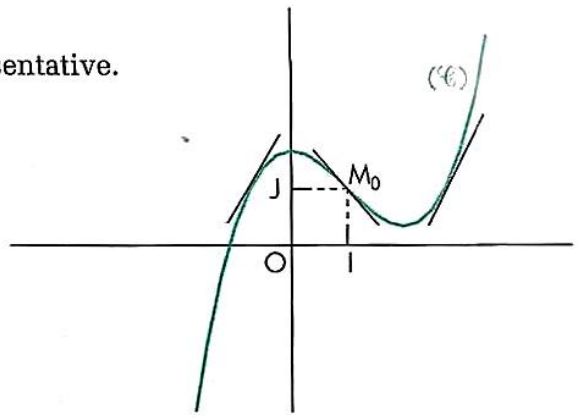
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;

on a : $f': x \mapsto x^2 - 2x$ et $f'': x \mapsto 2(x - 1)$.

• f'' est strictement négative sur $]-\infty; 1[$;
donc, sur cet intervalle f est concave.

• f'' est strictement positive sur $]1; +\infty[$;
donc, sur cet intervalle f est convexe.

• f'' s'annule et change de signe en 1 ;
donc, $M_0\left(\frac{1}{1}\right)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.



1.5. Travaux dirigés

Outils de comparaison

1°) Démontrer que pour tout nombre réel positif x , on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°) Démontrer que pour tous nombres réels a et b ($a < b$), on a : $4a^3(b - a) \leq b^4 - a^4 \leq 4b^3(b - a)$.

3°) Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1.

Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Solution

1°) Soit les fonctions $f: x \mapsto \sin x - x$ et $g: x \mapsto \sin x + \frac{x^3}{6} - x$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \cos x - 1$;

donc : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) \leq 0$.

La fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 0$.

On en déduit que : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \leq 0$;

c'est-à-dire : $\forall x \in [0; +\infty[, \sin x \leq x$.

• g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$,
 $g''(x) = -\sin x + x$
 $= -f(x)$.

D'après ce qui précède, $\forall x \in [0; +\infty[, g''(x) \geq 0$.

La fonction g' est donc croissante sur $[0; +\infty[$ et $g'(0) = 0$.

La fonction g , qui a une dérivée positive sur $[0; +\infty[$, est croissante sur cet intervalle ; de plus, $g(0) = 0$.

On en déduit que : $\forall x \in [0; +\infty[, g(x) \geq 0$; c'est-à-dire : $\forall x \in [0; +\infty[, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

2°) Soit la fonction $h: x \mapsto x^4$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 4x^3$; donc, h' est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que : $\forall x \in [a; b], 4a^3 \leq h'(x) \leq 4b^3$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $4a^3(b - a) \leq h(b) - h(a) \leq 4b^3(b - a)$;
c'est-à-dire : $4a^3(b - a) \leq b^4 - a^4 \leq 4b^3(b - a)$.

3°) Soit u la fonction de $]-1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $u(x) = (1 + x)^n$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de u .

u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x) = n(1 + x)^{n-1}$; $u''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}$.

u'' est positive sur $]-1; +\infty[$; donc, en tout point, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de sa tangente.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = 1 + nx$.

On en déduit que : $\forall x \in]-1; +\infty[, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	0	

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	0	+
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	0	



Pour démontrer une inégalité, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Étudier le signe d'une fonction.
- Appliquer l'inégalité des accroissements finis.
- Étudier la concavité d'une fonction.

Exercices

- 1a** Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.
- a) $f(x) = x^2|x|$ b) $f(x) = (x-2)\sqrt{2-x}$
 c) $f(x) = \sqrt{2x+5}$ d) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-3x-4}$
- 1b** 1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.
 Préciser l'ensemble de dérivabilité de f , puis déterminer sa fonction dérivée.
 2. En déduire, en utilisant la dérivée de la composée de deux fonctions, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.
- a) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2}$ b) $x \mapsto \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$
 c) $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ d) $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{\cos x + 2}$
- 1c** Soit f la fonction de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1; 1]$, définie par : $f(x) = \sin x$.
 1. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
 2. Déterminer l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
 3. De manière analogue, étudier la dérivabilité de la fonction réciproque de la fonction g de $[0; \pi]$ vers $[-1; 1]$, définie par $g(x) = \cos x$, puis déterminer sa dérivée.
- 1d** Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants.
- a) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ b) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$
 c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$
- 1e** Démontrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tous nombres réels a et b , on a : $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.
- 1f** Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[10\,000; 10\,001]$, pour donner un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10\,001}$ par 100.
- 1g** Déterminer les dérivées d'ordres 1, 2 et 3 des fonctions suivantes.
- a) $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ b) $x \mapsto -x^3 + x - 3$
 c) $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ d) $x \mapsto \frac{3x+2}{x-1}$
- 1h** Déterminer les dérivées successives de la fonction : $x \mapsto \frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + x + 1$.
- 1i** Déterminer les dérivées d'ordres 1, 2 et 3 des fonctions suivantes.
- a) $x \mapsto \tan x$ b) $x \mapsto \sin 2x$
 c) $x \mapsto \sin^2 x$ d) $x \mapsto \cos^2 x$

2 Études de fonctions

Dans cette leçon, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f .

2.1. Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation

f est une fonction polynôme ; donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto x^3 + x^2 - 2x$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$.

On a : $f'(-2) = f'(0) = f'(1) = 0$;

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; 1[, f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]0; 1[$;

$\forall x \in]-2; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]-2; 0[$ et sur $]1; +\infty[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{4} = +\infty$.

Donc, (C) admet en $+\infty$ une **branche parabolique** de direction celle de (OJ).

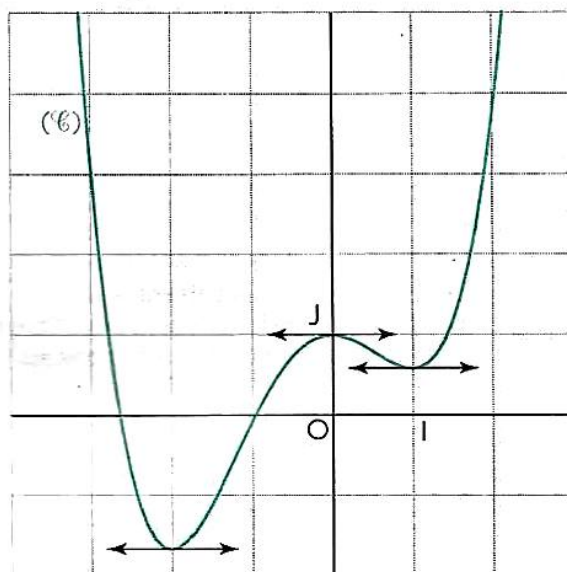
On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et que (C) admet en $-\infty$ une **branche parabolique** de direction celle de (OJ).

Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{5}{3}$	1	$\frac{7}{12}$	$+\infty$

La représentation graphique suggère et on démontre que (C) admet deux points d'inflexion.

Courbe représentative



Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 2}$

Ensemble de définition

Le polynôme $(x^2 - 2x + 2)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$; donc, $D_f = \mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation

f est une fonction rationnelle ;

donc, f est dérivable sur son ensemble définition et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{-x(x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$.

On a : $f'(0) = f'(2) = 0$;

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$;

$\forall x \in]0 ; 2[$, $f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]0 ; 2[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$.

Donc, la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	

La courbe représentative suggère que le point $\Omega\left(\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

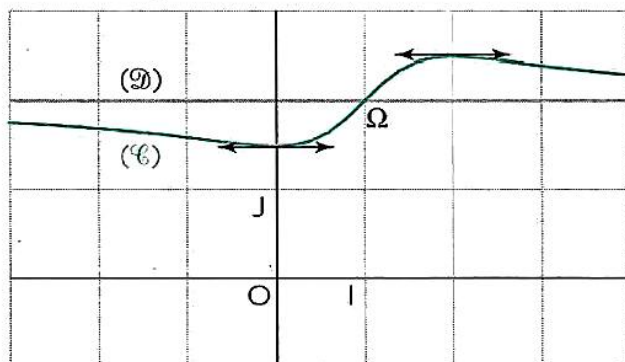
Démontrons ce résultat.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1}$;

donc, une équation de (C) dans le repère $(\Omega, \vec{OI}, \vec{OJ})$ est : $Y = \frac{X}{X^2 + 1}$.

Or la fonction $X \mapsto \frac{X}{X^2 + 1}$ est impaire. Donc Ω est un centre de symétrie de (C).

Courbe représentative



Étude de la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

Ensemble de définition

Le polynôme $(x^2 - x - 2)$ a pour racines -1 et 2 ; donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Dérivée et sens de variation

f est une fonction rationnelle ;

donc, f est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $f': x \mapsto \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{(x^2 - x - 2)^2}$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 + \sqrt{7}$ ou $x = 1 - \sqrt{7}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, \frac{x^2}{(x^2 - x - 2)^2} \geq 0$;

donc, $f'(x)$ est du signe du polynôme $(x^2 - 2x - 6)$.

On a : $\forall x \in]-\infty; 1 - \sqrt{7}[\cup]1 + \sqrt{7}; +\infty[, f'(x) > 0$;

donc, f est croissante sur $]-\infty; 1 - \sqrt{7}[$ et sur $]1 + \sqrt{7}; +\infty[$;

$\forall x \in]1 - \sqrt{7}; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; 1 + \sqrt{7}[$, $f'(x) < 0$;

donc, f est décroissante sur chacun des intervalles $]1 - \sqrt{7}; -1[$, $]-1; 2[$ et $]2; 1 + \sqrt{7}[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

En effectuant la division euclidienne de x^3 par $(x^2 - x - 2)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

Donc, la droite $(\mathcal{D}_1)$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

On démontre de même que $(\mathcal{D}_1)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

• On a également : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$;

donc, la droite $(\mathcal{D}_2)$ d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

De même : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$;

donc, la droite $(\mathcal{D}_3)$ d'équation $x = 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{7}$	-1	0	2	$1 + \sqrt{7}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ M $\searrow$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$+\infty$	$\searrow$ m $\nearrow$	$+\infty$

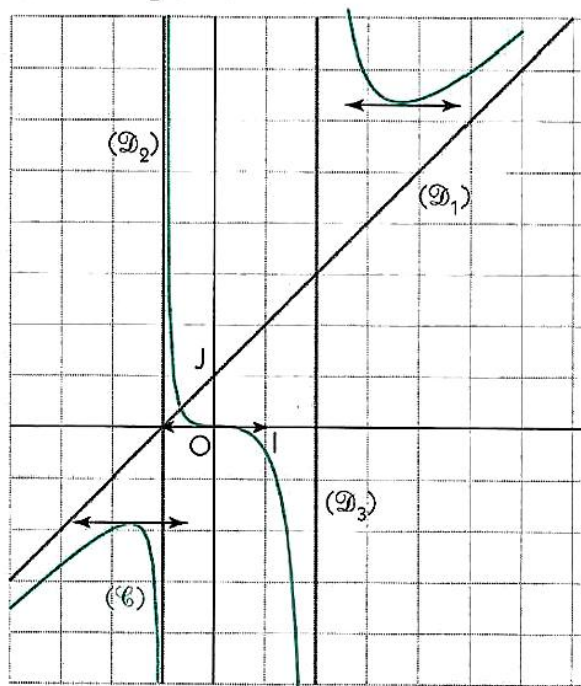
• On a : $M = \frac{20 - 14\sqrt{7}}{9}$; donc : $M \approx -1,89$.

$m = \frac{20 + 14\sqrt{7}}{9}$; donc : $m \approx 6,34$.

M est un maximum relatif et m est un minimum relatif de f .

• O est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

Courbe représentative



2.2. Fonctions irrationnelles

Étude de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Ensemble de définition

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$; donc, $D_f = \mathbb{R}$.

De plus, f est une fonction paire ; donc, on restreint son étude à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on trace la courbe correspondant à cet intervalle et on complète par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Dérivée et sens de variation

f est la composée des fonctions $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ces fonctions sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

Donc, f est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $f': x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$.

On a : $f'(0) = 0$;

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

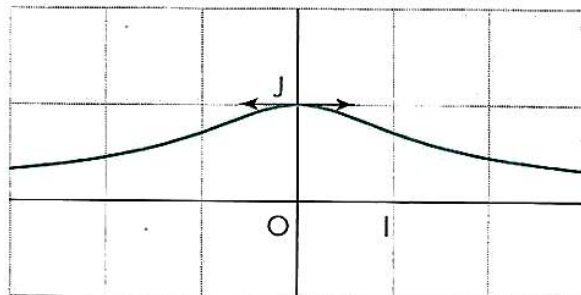
Étude aux bornes de $[0 ; +\infty[$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; donc, la droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	0

Courbe représentative



Étude de la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{4} \sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$

Ensemble de définition

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, |x^2 - 4x - 12| \geq 0$; donc, $D_f = \mathbb{R}$.

f est la composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$; donc :

$$\begin{cases} f(-2) = f(6) = 0 \\ f(x) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 - 4x - 12}, & \text{si } x \in]-\infty ; -2[\cup]6 ; +\infty[\\ f(x) = \frac{3}{4} \sqrt{-x^2 + 4x + 12}, & \text{si } x \in]-2 ; 6[. \end{cases}$$

Dérivée et sens de variation

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 6\}$ et on a :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{3}{4} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}}, & \text{si } x \in]-\infty ; -2[\cup]6 ; +\infty[\\ f'(x) = \frac{3}{4} \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}, & \text{si } x \in]-2 ; 6[. \end{cases}$$

On a : $f'(2) = 0$;

$\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; 6[$, $f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]2 ; 6[$;

$\forall x \in]-2 ; 2[\cup]6 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]-2 ; 2[$ et sur $]6 ; +\infty[$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} -\frac{3}{4} \frac{\sqrt{(x + 2)(x - 6)}}{-x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{-x + 6}{-x - 2}} = -\infty.$

De même, on a : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = +\infty.$

Donc, f n'est pas dérivable en -2 et $(\mathcal{C})$ a une demi-tangente parallèle à (OJ) au point d'abscisse -2 .
On démontre de même que f n'est pas dérivable en 6 et que $(\mathcal{C})$ a une demi-tangente parallèle à (OJ) au point d'abscisse 6 .

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x - 12) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{De plus : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}} = -\frac{3}{4} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{4}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} \frac{(x^2 - 4x - 12) - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x - 12} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} \frac{x(-4 - \frac{12}{x})}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{3}{2}.$$

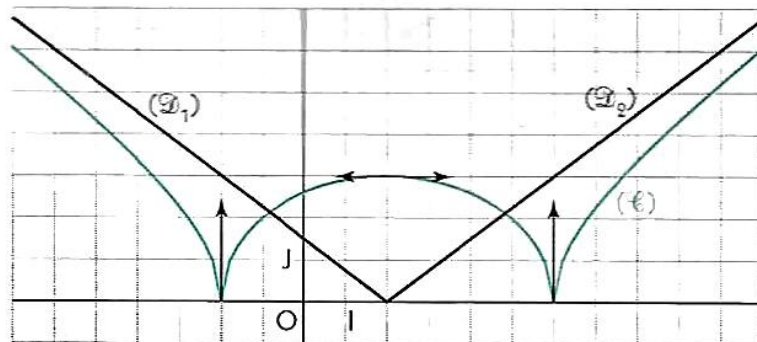
Donc, la droite $(\mathcal{D}_1)$ d'équation $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que la droite $(\mathcal{D}_2)$ d'équation $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	2	6	$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



2.3. Fonctions trigonométriques

Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{2 \sin 2x}{1 + \cos x}$

Ensemble de définition

On a : $1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \pi [2\pi]$; donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

De plus, f est impaire et périodique de période 2π ; donc, on restreint son étude à l'intervalle $[0 ; \pi[$, on trace la courbe correspondant à cet intervalle et on complète par la symétrie de centre O , puis par la translation de vecteur $2\pi\vec{OI}$.

Dérivée et sens de variation

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition ; donc, f est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{4(\cos^2 x + \cos x - 1)}{1 + \cos x}$.

On a : $\forall x \in [0 ; \pi[, 1 + \cos x > 0$; donc, $f'(x)$ a le même signe que $(\cos^2 x + \cos x - 1)$.

On pose : $X = \cos x$; le polynôme $(X^2 + X - 1)$ a deux racines : $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

On a : $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \notin [-1 ; 1]$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in [-1 ; 1]$.

Soit α l'élément de l'intervalle $[0 ; \pi[$ tel que : $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

On a : $f'(\alpha) = 0$;

$\forall x \in [0 ; \alpha[$, $f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $[0 ; \alpha[$;

$\forall x \in]\alpha ; \pi[$, $f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]\alpha ; \pi[$.

Étude aux bornes de $[0 ; \pi[$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \cos x) = 0$;

on ne peut pas trouver directement la limite en π de $f(x)$.

On remarque que : $\forall x \in]0 ; \pi[$, $f(x) = \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{4 \cos x (1 - \cos x)}{\sin x}$.

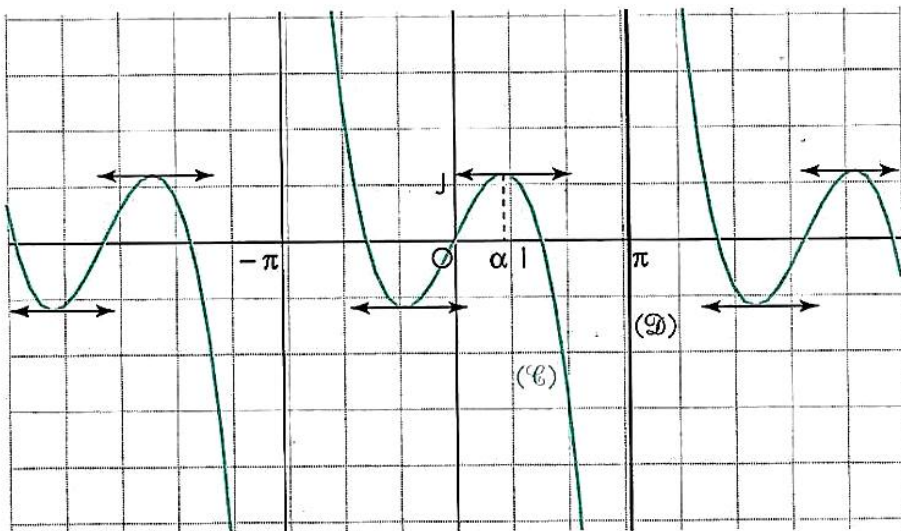
Donc : $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{4 \cos x (1 - \cos x)}{\sin x} = -\infty$.

On en déduit que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = \pi$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Tableau de variation

x	0	α	π
$f'(x)$	2	+	0
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

Courbe représentative



On a : $\alpha \approx 0,904$ et $f(\alpha) \approx 1,201$.

Étude de la fonction $f : x \mapsto x - \sin x$

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x+2\pi \\ y+2\pi \end{pmatrix}$ son image par la translation t de vecteur $2\pi(\vec{OI} + \vec{OJ})$.

On a : $M' \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow y + 2\pi = f(x + 2\pi)$
 $\Leftrightarrow y = f(x)$
 $\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C})$.

On en déduit que $(\mathcal{C})$ est globalement invariante par t et on restreint l'étude de f à un intervalle d'amplitude 2π , par exemple $[-\pi ; \pi]$.

On remarque également que f est impaire ; donc l'intervalle d'étude peut être réduit à $[0 ; \pi]$.

On étudie la fonction sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, on trace la courbe correspondant à cet intervalle et on complète par la symétrie de centre O , puis par la translation t .

Dérivée et sens de variation

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 1 - \cos x$.

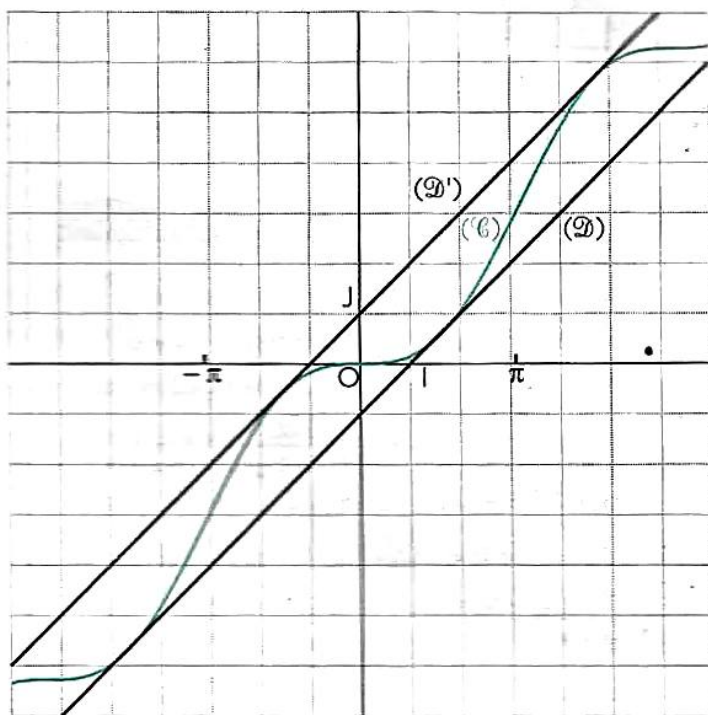
On a : $f'(0) = 0$;

$\forall x \in]0 ; \pi[$, $f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]0 ; \pi[$.

Tableau de variation

x	0	π
$f'(x)$	0	2
$f(x)$	0	π

Courbe représentative



• On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$;
donc, (C) est comprise entre les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

(C) est tangente à (D) aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

(C) est tangente à (D') aux points d'abscisses $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• La dérivée seconde de f est la fonction $f'' : x \mapsto \sin x$; donc, les points d'abscisses $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont des points d'inflexion de (C).

Exercices

2.a Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.
a) $x \mapsto (x-1)^2(x+1)$ b) $x \mapsto x^4 - 10x^2 + 9$.

2.b Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.
a) $x \mapsto \frac{x^2 - 12x - 4}{x^2 - 4x + 5}$ b) $x \mapsto \frac{-2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$.

2.c Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.
a) $x \mapsto \frac{x^2 + 5x - 4}{2x}$ b) $x \mapsto \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$.

2.d Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ et (C) sa courbe représentative.
1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
(C) admet-elle une tangente au point d'abscisse 4 ?
2. Étudier les variations de f et la branche infinie de (C).
3. Tracer (C).

2.e Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ et (C) sa courbe représentative.
1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
(C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses -4 et 1 ?

2. Étudier les variations de f et les branches infinies de (C).
3. Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera une équation.

2.f Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$ et (C) sa courbe représentative.

1. Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$.

2. a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sin x \sin 2x.$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

3. Tracer (C) ; préciser les coordonnées de ses centres de symétrie et des points où la tangente est parallèle à (OI).

2.g Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

2. a) Démontrer que :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{(1 - \cos x)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$.

c) Vérifier que sur cet intervalle (C) présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature.

3. a) Tracer (C) ; préciser les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI).

b) Déterminer une équation des tangentes aux points d'abscisses $-\pi$ et π .

Exercices

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

APPRENTISSAGE

Calculs de dérivées

1 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto -x^5 + x^3 - 4$ b) $x \mapsto (x^2 + 1)^4$
c) $x \mapsto (5x + 2)^3(3 - 4x)$ d) $x \mapsto x^5(2 - 4x^2)^3$.

2 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto \frac{2x-1}{-x+1}$ b) $x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$
c) $x \mapsto \left(\frac{x-1}{3x+1}\right)^2$ d) $x \mapsto \frac{(2x-1)^2}{(3x+1)^3}$.

3 Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ b) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$
c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3x-2}$.

4 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

Démontrer que f est une fonction constante.

5 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto \cos x - \sin x$ b) $x \mapsto \cos\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right)$
c) $x \mapsto \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{6}\right)$ d) $x \mapsto \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
e) $x \mapsto \sin(\cos x)$ f) $x \mapsto x^2 \cos \frac{1}{x}$
g) $x \mapsto \sin \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ h) $x \mapsto \tan(\tan x)$
i) $x \mapsto \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$ j) $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\cos^2 x}$.

6 En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$
c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos^2 x - \cos^2 a}{x - a}$ d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$
e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$ f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^3 x + 1}{x - \pi}$.

7 En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} + 1}{x-1}$

- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{x - 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x+6}}{2x - 6}$.

8 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa

courbe représentative.

- Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
- Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur -4 ?
- Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$?

9 Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.

- a) $f(x) = \left(\sqrt[3]{2x^2 - x - 6}\right)^5$ b) $f(x) = \left(\sqrt[5]{2x^2 - x - 6}\right)^3$
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - x - 6}}$ d) $f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{-2x^2 + x + 6}\right)^3}$.

Dérivée de fonctions réciproques

10 Soit f la fonction de $[0; \frac{\pi}{2}]$ vers $[0; 1]$ définie par : $f(x) = \sin^2 x$.

- Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
- Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

11 Soit f la fonction de $[0; \frac{\pi}{2}]$ vers $[1; +\infty[$ définie par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
- Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

12 Soit f la fonction de $]-\pi; \pi[$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \tan \frac{x}{2}$.

- Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
- Démontrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

Comparaison de nombres

13 Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration du nombre : $\sqrt{33} - \sqrt{32}$.

14 1. Démontrer que pour tout nombre réel a de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a : $a \leq \tan a \leq 2a$.

2. Démontrer que pour tous nombres réels a et b de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

15 Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$, on a : $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.

16 1. a) Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto 3x^3 - 5x$.

b) Comparer les deux nombres A et B :

$$A = 3 \times (0,745\ 356\ 123)^3 - 5 \times (0,745\ 356\ 123),$$

$$B = 3 \times (0,745\ 356\ 124)^3 - 5 \times (0,745\ 356\ 124).$$

2. Utiliser un procédé analogue pour comparer les deux nombres C et D :

$$C = \frac{\sqrt{5} (2,098\ 765\ 432\ 1)^2}{1 - 2,098\ 765\ 432\ 1},$$

$$D = \frac{\sqrt{5} (2,098\ 765\ 432)^2}{1 - 2,098\ 765\ 432}.$$

17 a et b sont deux nombres réels strictement positifs tels que : $a + b = 1$.

Quelles sont les valeurs extrêmes de $a^3 + b^3$?

Dérivées successives

18 Déterminer les dérivées première et seconde des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1} \quad b) x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x} \quad c) x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$d) x \mapsto \cos^3 x \quad e) x \mapsto \sin^3 x \quad f) x \mapsto \tan^2 x.$$

19 Déterminer la fonction polynôme f du quatrième degré telle que : $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, $f''(-1) = 3$, $f^{(3)}(-1) = 4$ et $f^{(4)}(-1) = 5$.

20 1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos x$. Démontrer par récurrence que la dérivée n -ième de f est la fonction $f^{(n)}$ définie par : $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

2. Utiliser le résultat de la question précédente et celui établi à propos de la fonction sinus (cf. paragraphe 1.4. de ce chapitre) pour déterminer la dérivée n -ième des fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$.

3. Application

Déterminer la dérivée n -ième de la fonction :

$$x \mapsto \cos 2x - \sin \frac{x}{2}.$$

Études de fonctions

21 Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

$$a) x \mapsto \frac{2x+1}{x-1} \quad b) x \mapsto \frac{2x-3}{3x^2-4x}$$

$$c) x \mapsto \frac{x^2+3x}{x^2-4}$$

$$d) x \mapsto \frac{-x^2-x+8}{x^2-x-2}$$

$$e) x \mapsto \frac{x^2+4x-3}{x^2-2x-3}$$

$$f) x \mapsto \frac{x^2}{x^3+1}$$

22 Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

$$a) x \mapsto \frac{2x^2-3x+6}{x-2}$$

$$b) x \mapsto \frac{x^2+x-2}{x-2}$$

$$c) x \mapsto \frac{2x^3}{x^2+1}$$

$$d) x \mapsto \frac{x^3}{x^2+x-2}$$

23 Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

$$a) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$$

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme

$$ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2},$$

où a, b, c , et d sont quatre nombres réels.)

$$b) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{2(x+3)}$$

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $a'x^2 + b' + \frac{c'}{x+3}$, où a', b' et c' sont trois nombres réels.)

24 Soit la fonction $f: x \mapsto |x^2 - 1| + 2|x| - 3$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $-1, 0$ et 1 .

2. Étudier les variations de f et tracer ($\mathcal{C}$).

25 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 0 .

2. Étudier les variations de f et tracer ($\mathcal{C}$).

26 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 2 .

2. Étudier les variations de f et tracer ($\mathcal{C}$).

27 Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

$$a) x \mapsto x^2 - 4\sqrt{x}$$

$$b) x \mapsto x + 3 + \sqrt{x - 2}.$$

28 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{4}{3}x(6-x)}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; ($\mathcal{C}$) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 0 et 6 ?

2. Étudier les variations de f et tracer ($\mathcal{C}$).

Démontrer que cette courbe admet un axe de symétrie.

29 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{(x+3)(x-5)}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; ($\mathcal{C}$) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses -3 et 5 ?

2. Étudier les variations de f et préciser l'allure de ($\mathcal{C}$) en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Tracer ($\mathcal{C}$) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie.

30 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente parallèle à (OI) au point d'abscisse 0.
 2. Étudier les variations de f .
- Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet trois asymptotes.
3. Tracer $(\mathcal{C})$.

31 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente parallèle à (OJ) au point d'abscisse 2.
 2. Étudier les variations de f .
- Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes.
3. Tracer $(\mathcal{C})$.

32 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2\cos\frac{3x}{2} - 3\cos x.$$

1. Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; 2\pi]$.
2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sin x \sin 2x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.
4. Tracer la courbe représentative de f .

33 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Déterminer D_f ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$.
2. Démontrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{2\cos x + \cos 2x}{1 + \cos x}$.
3. Vérifier que sur $[0; \pi]$ $(\mathcal{C})$ présente une branche infinie, dont on précisera la nature.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
5. Tracer $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$; préciser les coordonnées de ses points d'inflexion.

34 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \tan 2x - 2\tan x \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Déterminer D_f ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2. Démontrer que :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{2\tan^2 x(1 + \tan^2 x)(3 - \tan^2 x)}{(1 - \tan^2 x)^2}.$$

3. Vérifier que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ $(\mathcal{C})$ présente deux branches infinies, dont on précisera la nature.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
5. Tracer $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

35 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{4\sin^2 x + 3\sin x}{\sin x - 1} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Déterminer D_f . Démontrer que les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétrie de $(\mathcal{C})$. À quel ensemble peut-on réduire l'étude de f ?

2. Démontrer que :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{\cos x(2\sin x - 3)(2\sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2}.$$

3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

Démontrer que sur cet intervalle $(\mathcal{C})$ présente une seule branche infinie, dont on précisera la nature.

4. Tracer $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

APPROFONDISSEMENT

36 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}$.

1. Vérifier que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x de cet intervalle, on a : $f''(x) + f(x) = 3f^5(x)$.

37 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (1 + x)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1. Déterminer la dérivée de f .
2. Après avoir développé $f(x)$ par la formule du binôme, donner une autre expression de cette dérivée.
3. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$a) \sum_{p=1}^n p C_n^p = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n;$$

$$b) \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} p C_n^p = 1C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (-1)^n n C_n^n.$$

38 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x(1 + x)^n \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}).$$

1. Déterminer la dérivée de f .
2. Après avoir développé $f(x)$ par la formule du binôme, donner une autre expression de cette dérivée.
3. En déduire que :

$$a) \sum_{p=0}^n (p+1) C_n^p = (n+2)2^{n-1};$$

$$b) \sum_{p=0}^n (-1)^p (p+1) C_n^p = 0.$$

39 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Soit n un nombre entier naturel non nul ; démontrer qu'il existe un polynôme P_n , de degré n , tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n! P_n(x)}{2(x^2 - 1)^{n+1}}$$

où $f^{(n)}$ est la dérivée n -ième de f .

40 Formule de Leibnitz

On considère deux fonctions f et g dérivables jusqu'à l'ordre n sur un intervalle K .

1. Déterminer $(fg)'$ et $(fg)''$.
2. Démontrer que : $(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$.
3. En utilisant un raisonnement par récurrence, donner une expression de $(fg)^{(n)}$.

4. Application

Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto x \cos x$$

$$b) x \mapsto x^2 \cos x$$

$$c) x \mapsto (x^2 + 3x - 1) \sin x$$

$$d) x \mapsto \frac{1}{x}$$

41 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2,$$

où E désigne la fonction partie entière.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Étudier f et tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[-3; 3]$.

42 Soit a, b, c trois nombres réels et f une fonction périodique, de période 2, telle que :

$$\forall x \in [0; 2[, f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f(2)$. Trouver, sous la forme d'une relation entre b, c et d , une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer b, c et d pour qu'en plus f admette en 1 un extremum relatif égal à $-\frac{1}{2}$.

3. Étudier alors la dérivabilité de f et construire $(\mathcal{C})$, en précisant ses points d'inflexion et axes de symétrie.

43 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

1. Étudier f et tracer sa courbe représentative.

2. En déduire le tracé des courbes d'équations :

$$y = \sqrt{x^3 + x^2} \text{ et } y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

44 Soit la fonction $f: x \mapsto x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2$.

1. Étudier f et tracer sa courbe représentative.

2. En déduire la courbe représentative de la fonction $g: x \mapsto f(|x|)$.

45 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue ».

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; $(\mathcal{C})$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3. Étudier les variations de f .

4. Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.

5. Tracer $(\mathcal{C})$ et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.

6. Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 5]$, le point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right)$ est à une distance constante du point $\Omega\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

En déduire la nature de $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[1; 5]$.

46 Soit f la fonction de $[-\pi; \pi]$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x.$$

1. Étudier f et tracer sa courbe représentative.

2. Déterminer, graphiquement et selon les valeurs du nombre réel m , le nombre de solutions dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ de l'équation : $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = m$.

47 1. Soit f la fonction de $]0; 2[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right).$$

Étudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.

2. Justifier que f est bijective ;

soit g sa fonction réciproque.

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée

$$\text{est la fonction } g': x \mapsto \frac{2}{\pi(x^2 + 1)}.$$

3. On considère la fonction h , définie par :

$$h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Étudier la dérivabilité de h sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée. En déduire la formule explicite de h sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

48 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

1. Soit la fonction $\varphi: x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$.

a) Démontrer que pour t élément de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\varphi(\tan t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2}.$$

b) En déduire le signe de $\varphi(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction $f: x \mapsto -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

Étudier f : préciser la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses asymptotes, puis construire $(\mathcal{C}_f)$.

3. Déterminer l'intervalle K pour lequel f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur K . Dans ce cas, soit g la fonction réciproque de f et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

Déterminer $g(x)$ pour tout x élément de K .

Construire $(\mathcal{C}_g)$ et donner les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$.

49 1. a) Tracer la courbe représentative de la

fonction $x \mapsto \tan x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

b) En déduire que l'équation $\tan x + x = 0$ admet dans cet intervalle deux solutions non nulles α et β .

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de ces solutions.

2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x \sin x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative, par (Δ) et (Δ') les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

a) Démontrer que f est une fonction paire.

Déterminer les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (OI) .

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \leq f(x) \leq x$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (Δ) [respectivement $(\Delta')]$.

Démontrer qu'en chacun de ces points, (Δ) [respectivement $(\Delta')]$ est tangente à $(\mathcal{C})$.

d) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Tracer $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

50 1. Soit la fonction $f: x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 ?

b) Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes, que l'on précisera.

c) Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C}_f)$.

2. Soit la fonction $g: x \mapsto x - \sqrt{|x^2 - 1|}$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

a) Démontrer que $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport au point O .

b) Construire $(\mathcal{C}_g)$ sur le même graphique que $(\mathcal{C}_f)$.

51 1. Soit la fonction $f: x \mapsto (\sqrt{x} - 1)^2$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

a) Étudier f et construire $(\mathcal{C}_f)$.

b) Calculer $f \circ f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la restriction de f à l'intervalle $[0; 1]$ et la partie correspondante de $(\mathcal{C}_f)$?

2. Soit la fonction $g: x \mapsto (\sqrt{x} + 1)^2$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

Démontrer que g est la fonction réciproque de la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

En déduire une construction de $(\mathcal{C}_g)$.

52 1. Soit la fonction $f: x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$. Étudier f et tracer sa courbe représentative.

2. Soit les fonctions :

$$g: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ et } h: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Étudier le sens de variation de g et h sur $]0; +\infty[$.

3. Soit n un entier naturel non nul et P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{1+x^2})^n + (x - \sqrt{1+x^2})^n \right].$$

a) Démontrer que P_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

b) Soit la fonction $\varphi_n: x \mapsto x^n$.

Démontrer que l'on a, suivant la parité de n :

$$P_n = g \circ \varphi_n \circ f \text{ ou } P_n = h \circ \varphi_n \circ f.$$

c) En déduire le sens de variation de P_n .

53 Encadrement de $\sqrt{1+a}$

1. a) Démontrer que la courbe représentative, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est au-dessus de sa tangente en tout point.

b) En déduire que :

$$\forall \alpha \in [0; +\infty[, \frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha \quad (1).$$

2. Soit la fonction $g: x \mapsto \sqrt{1+x}$ et a un nombre réel strictement positif.

a) Déterminer les dérivées première et seconde de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Vérifier que :

$$\forall x \in [0; a], \quad \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0; a]$, démontrer que :

$$1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2} \quad (2).$$

3. Déduire des inégalités (1) et (2) que :

$$\forall a \in]0; +\infty[, \quad 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}.$$

4. Application

Établir les inégalités suivantes.

- $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$
- $100,00499975 \leq \sqrt{10\,001} \leq 100,005$
- $5,098 \leq \sqrt{26} \leq 5,1$.

En déduire une valeur approchée des nombres $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{10\,001}$ et $\sqrt{26}$, en précisant à chaque fois l'incertitude.

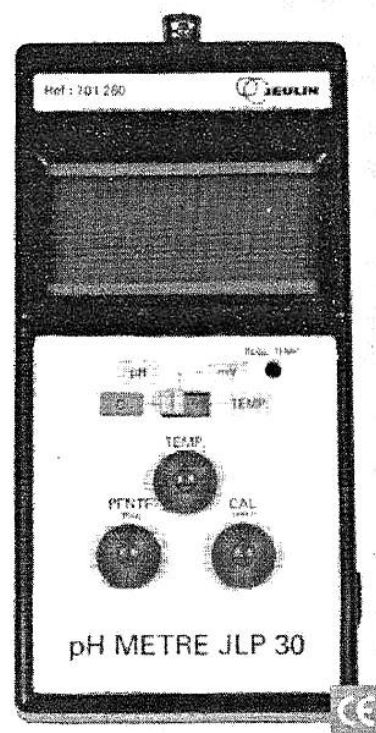
Primitives - Fonction logarithme népérien

Introduction

Le mathématicien écossais John NAPIER – ou NÉPER – (1550-1617) inventa le mot et le concept de logarithmes en 1614 dans sa : Description de la stupéfiante règle des logarithmes. Son but était de simplifier le calcul d'un produit en le ramenant à celui d'une somme.

Cette découverte allait donner naissance aux tables de logarithmes, à la règle à calcul et au pH-mètre.

La règle à calcul, inventée en 1620 par l'Anglais Edmund GUNTER, resta l'outil de calcul privilégié des ingénieurs et techniciens jusqu'à son abandon définitif au début des années 1970 au profit des calculatrices électroniques de poche.



Un pH-mètre.

© Jeulin.

SOMMAIRE

1. Primitives d'une fonction	234
2. Fonction logarithme népérien	239
3. Fonctions comportant $\ln$	245
4. Logarithme décimal	247

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variable réelle et le plan est muni du repère (O, I, J) .

1 Primitives d'une fonction

1.1. Définition et propriétés

Introduction

Dans chacun des cas suivants, déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle K que l'on précisera et dont la dérivée est la fonction f .

- $f : x \mapsto 1$ • $f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ • $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $f : x \mapsto 3x^2$ • $f : x \mapsto \cos x$ • $f : x \mapsto 3x^2 + \cos x$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K .

On appelle primitive de f sur K toute fonction F de K vers $\mathbb{R}$, dérivable sur K et telle que, pour tout élément x de K , $F'(x) = f(x)$.

Exemples

- La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$;
les fonctions $x \mapsto x^2 + 3$, $x \mapsto x^2 - \sqrt{5}$ et $x \mapsto x^2 + \frac{\pi}{4}$ sont aussi des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $G : x \mapsto 3x + \sqrt{x}$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- La fonction $H : x \mapsto 1 - \cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto \sin x$.

Une fonction définie sur un intervalle K admet-elle une primitive sur cet intervalle ?

La propriété suivante, que nous admettons, apporte une réponse partielle à cette question.

Propriété

Si f est une fonction continue sur un intervalle K , alors f admet une primitive sur K .

Remarques

Soit f une fonction définie sur un intervalle K .

- Si f n'est pas continue sur K , elle peut admettre ou ne pas admettre de primitive sur K (cf. §1.3. TD1).
- Si f est continue sur K , elle admet une primitive sur K mais on ne sait pas toujours en donner une formule explicite.

Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété 1

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K .

- Pour tout nombre réel c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K .
- Toute primitive de f sur K est de la forme $x \mapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration

- Soit c un nombre réel. La fonction $x \mapsto F(x) + c$ est dérivable sur K et a la même dérivée que la fonction $x \mapsto F(x)$. Donc, la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K .
- Soit G une primitive de f sur K . La fonction $G - F$ est dérivable sur K et on a :
 $\forall x \in K, (G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$; donc, $G - F$ est une fonction constante sur K .
On en déduit que G est de la forme $x \mapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Exemple

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x$ sont les fonctions $x \mapsto x^2 + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété 2

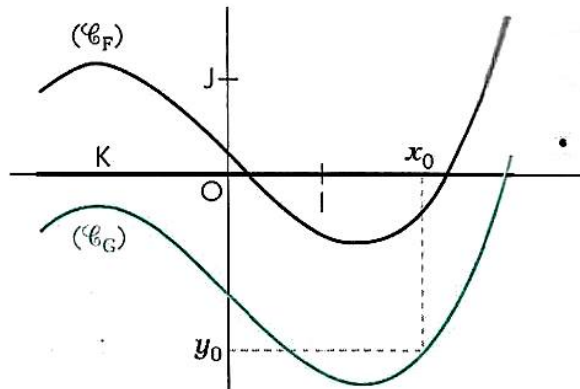
Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle K , y_0 un nombre réel et x_0 un élément de K . Il existe une primitive de f sur K et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K . Toute primitive G de f sur K est telle que : $\forall x \in K, G(x) = F(x) + c$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } G(x_0) = y_0 &\Leftrightarrow F(x_0) + c = y_0 \\ &\Leftrightarrow c = -F(x_0) + y_0. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $G : x \mapsto F(x) - F(x_0) + y_0$ est la primitive de f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 .



Exemple

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x$ qui prend la valeur -1 en $\frac{\pi}{2}$.

F est de la forme $x \mapsto \sin x + c$, où $c \in \mathbb{R}$. De plus, on a : $F(\frac{\pi}{2}) = -1 \Leftrightarrow 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2$.

Donc, la fonction $F : x \mapsto \sin x - 2$ est la primitive cherchée.

1.2. Calculs de primitives

Primitives de fonctions élémentaires

La connaissance des dérivées des fonctions élémentaires permet de dresser le tableau suivant, où c désigne un nombre réel.

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$] 0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$] 0 ; +\infty[$, si $r \geq 0$ $] 0 ; +\infty[$, si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$] (2k-1)\frac{\pi}{2} ; (2k+1)\frac{\pi}{2} [\ (k \in \mathbb{Z})$

Exemples

- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^4}{4} + c \ (c \in \mathbb{R})$.
- Les primitives sur $] 0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^5}$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{4x^4} + c \ (c \in \mathbb{R})$.

Primitives de la somme de deux fonctions

Propriété

Soit u et v deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle K les fonctions U et V .
La fonction $u + v$ admet pour primitive sur K la fonction $U + V$.

En effet, $U + V$ est dérivable sur K et on a : $(U + V)' = U' + V' = u + v$.

Exemples

- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x + \sin x$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{2} - \cos x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).
- Les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions $x \mapsto 2x - 2\sqrt{x} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).
- On a : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$; donc, les primitives de la fonction $x \mapsto \tan^2 x$ sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ sont les fonctions $x \mapsto \tan x - x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Primitives du produit d'une fonction par un nombre réel

Propriété

Soit u une fonction admettant pour primitive sur un intervalle K la fonction U et k un nombre réel.
La fonction ku admet pour primitive sur K la fonction kU .

En effet, kU est dérivable sur K et on a : $(kU)' = kU' = ku$.

Exemples

- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 5x^2$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{5x^3}{3} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).
- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2 \cos x$ sont les fonctions $x \mapsto 2 \sin x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Primitives de $u' \times (v \circ u)$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$.
La fonction $u' \times (v \circ u)$ admet pour primitive sur K la fonction $v \circ u$.

En effet, $v \circ u$ est dérivable sur K et sa dérivée est $u' \times (v \circ u)$.

On en déduit le tableau suivant.

Fonction f	Une primitive de f	Commentaires
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	sur tout intervalle où u est dérivable
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	sur tout intervalle où u est dérivable et positive (strictement positive, si $r < 0$)
$u' \cos u$	$\sin u$	sur tout intervalle où u est dérivable
$u' \sin u$	$-\cos u$	sur tout intervalle où u est dérivable

Exemples

- La fonction $x \mapsto \cos x \sin^3 x$ a pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto \frac{\sin^4 x}{4} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).
- La fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^4}$ a pour primitives sur chacun des intervalles $]-\infty; -2[$, $]-2; 0[$ et $]0; +\infty[$

les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{6(x^2+2x)^3} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

En effet, f est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u^4}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 2x$.

- La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ a pour primitives sur $] -1; 1[$ les fonctions $x \mapsto -\sqrt{1-x^2} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

- La fonction $g : x \mapsto \frac{2x}{(\sqrt[3]{x^2+1})^2}$ a pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto 3\sqrt[3]{x^2+1} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

En effet, g est de la forme $u'u^{-\frac{2}{3}}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 1$.

- La fonction $x \mapsto \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ a pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

1.3. Travaux dirigés

1. Continuité et primitives

L'existence de primitives pour toute fonction continue sur un intervalle est un résultat simple à énoncer et fondamental en analyse. Admis en classe de terminale, ce résultat ne doit cependant pas occulter la complexité de la question des fonctions admettant des primitives.

Nous allons donner deux exemples de fonctions non continues sur $\mathbb{R}$, l'une admettant des primitives sur $\mathbb{R}$, l'autre n'en admettant pas.

- 1°) Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

a) Démontrer que f n'est pas continue en 0.

b) Démontrer que la fonction F définie par
$$\begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$
 est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- 2°) Soit g la fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = 0, & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

a) Démontrer que g n'est pas continue en 0.

b) On suppose que g admet une primitive G sur $\mathbb{R}$.

- Démontrer que G est une fonction constante sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
- Justifier que G est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire que G est une fonction constante.
- Conclure.

Solution

1°) a) La fonction $x \mapsto \cos x$ n'a de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Donc, la fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$; en effet, $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - f(x)$. Donc, f n'admet pas de limite en 0 ; en effet, si f admettait une limite en 0, alors la fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ en admettrait également une, ce qui est faux.

On en déduit que f n'est pas continue en 0.

b) • Lorsque $x \neq 0$, on a : $F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

• Par ailleurs, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$; donc : $F'(0) = 0$.

On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction f .

Donc, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; elle admet cependant une primitive sur $\mathbb{R}$.

2°) a) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$ et $g(0) = 1$; donc, g n'est pas continue en 0.

b) • Si g admet une primitive G sur $\mathbb{R}$, alors G est une fonction de dérivée nulle sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, c'est-à-dire une fonction constante sur chacun de ces intervalles.

Il existe deux nombres réels c et c' tels que : $\begin{cases} G(x) = c, & \text{si } x < 0 \\ G(x) = c', & \text{si } x > 0 \end{cases}$

• La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc G est continue sur $\mathbb{R}$.

G est continue en 0 ; donc, on a : $G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$. On en déduit que : $G(0) = c = c'$.

Ainsi, G est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

• On a démontré que si g admet une primitive sur $\mathbb{R}$, alors cette primitive est une fonction constante ; donc g serait la fonction nulle, ce qui est en contradiction avec les données.

On en déduit que la fonction g n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

La fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et elle n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

2. Primitives de polynômes trigonométriques

L'objectif de ce travail dirigé est de déterminer les primitives d'une fonction trigonométrique de la forme $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$, n et m étant des entiers naturels non nuls.

1°) Soit la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$.

Après avoir linéarisé $f(x)$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

2°) Soit la fonction $g : x \mapsto 2 \sin^5 x \cos^4 x$.

a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2 \sin x (\cos^8 x - 2 \cos^6 x + \cos^4 x)$.

b) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g .

Solution

1°) On utilise les formules d'Euler : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6ix} + 2e^{4ix} - e^{2ix} - 4 - e^{-2ix} + 2e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{32} \left[\left(\frac{e^{6ix} + e^{-6ix}}{2} \right) + 2 \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} \right) - \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) - 2 \right] \\ &= -\frac{1}{32} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 2x + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{192} \sin 6x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 2x + \frac{1}{16} x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

2°) a) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} \text{On a : } g(x) &= 2 \sin x (\sin^4 x \cos^4 x) \\ &= 2 \sin x \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^2 \\ &= 2 \sin x \cos^4 x (\cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1) \\ &= 2 \sin x (\cos^8 x - 2 \cos^6 x + \cos^4 x). \end{aligned}$$

b) On en déduit que la fonction $G : x \mapsto -\frac{2}{9} \cos^9 x + \frac{4}{7} \cos^7 x - \frac{2}{5} \cos^5 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g .

M

Pour déterminer les primitives des fonctions du type $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$ ($n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$), on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Si m et n sont de même parité, linéariser $\cos^n x \sin^m x$.
- Si m et n sont de parités différentes, utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et écrire $\cos^n x \sin^m x$ sous la forme $\cos x P(\sin x)$ si n est impair ou $\sin x P(\cos x)$ si m est impair, P désignant un polynôme.

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 7$,

$f(x) = 6(2x - 1)^2$,

$K = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -2\cos(3x + 2)$,

$f(x) = 6\sin(3x + 2)$,

$K = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = \sqrt{2x + 1}$,

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$,

$K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

d) $F(x) = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^2$,

$f(x) = \frac{(x\sqrt{x} - 1)(2 + x\sqrt{x})}{x^3}$,

$K =]0; +\infty[$.

1.b Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 1$, $K = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $K =]-\infty; 0[$

c) $f(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $K =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \cos x - 2\sin x$, $K = \mathbb{R}$.

1.c Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 5x(5x^2 - 7)^4$ b) $f(x) = \frac{2x - 3}{(2x^2 - 6x + 11)^3}$

c) $f(x) = \frac{x(2x^2 + 1)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ d) $f(x) = 3\sin(3x - 2)$

e) $f(x) = 2 \cos x \sin^4 x$ f) $f(x) = x \cos(3x^2 - \frac{\pi}{4})$.

1.d Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K , qui vérifie les conditions indiquées.

a) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2}$,
 $K =]0; +\infty[$ et $F(2) = 0$

b) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$,
 $K = \mathbb{R}$ et $F(\pi) = -1$

c) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$,
 $K =]0; +\infty[$ et $F(1) = 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$,
 $K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $F(0) = 1$.

2 Fonction logarithme népérien

2.1. Définition et propriétés

Introduction

On se propose de déterminer les fonctions de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, dérivables sur $]0; +\infty[$, qui transforment les produits en sommes, c'est-à-dire les fonctions f qui vérifient la propriété : pour tous nombres réels x et y strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$ (1).

Condition nécessaire

On suppose qu'il existe une telle fonction f .

a) En posant $x = y = 1$, démontrer que : $f(1) = 0$.

b) On fixe y . Soit la fonction $g_y : x \mapsto f(xy) - f(x) - f(y)$.

• Justifier que g_y est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

• Justifier que g_y est la fonction nulle.

• En déduire que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $yf'(xy) = f'(x)$ (2).

c) L'égalité (2) est vraie pour $x = 1$ et pour tout y élément de $]0; +\infty[$. On pose : $k = f'(1)$.

Démontrer que f est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$, qui s'annule en 1.

Condition suffisante

k étant un nombre réel, la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$; elle admet donc des primitives sur cet intervalle. On désigne par f_k celle qui s'annule en 1.

Soit y un nombre réel strictement positif. On désigne par h_y la fonction $x \mapsto f_k(xy) - f_k(x) - f_k(y)$.

- Vérifier que : $h_y(1) = 0$.
- Justifier que h_y est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et démontrer que sa dérivée est la fonction nulle.
- En déduire que f_k vérifie l'égalité (1).

Les fonctions cherchées sont donc les primitives sur $]0 ; +\infty[$ des fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$ ($k \in \mathbb{R}$), qui s'annulent en 1.

De telles fonctions sont appelées fonctions logarithmes.

Définition et propriété fondamentale

Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$, qui s'annule en 1.

- Le logarithme népérien de x est noté $\ln x$.
- On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[, (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln 1 = 0$.



La touche **ln** d'une calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée du logarithme népérien de tout nombre réel strictement positif.

$\ln 3 \approx 1,098\ 612$; $\ln \sqrt{2} \approx 0,346\ 573$; $\ln \frac{3}{4} \approx -0,287\ 682$; $\ln 10^{-5} \approx -11,512\ 925$.

Propriété fondamentale

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Cette propriété est une conséquence de l'introduction.

Autres propriétés

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel r , on a :

(1) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; (2) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; (3) $\ln a^r = r \ln a$.

Démonstration

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

(1) On a : $\ln \frac{1}{a} + \ln a = \ln \left(\frac{1}{a} \times a \right) = \ln 1 = 0$; donc : $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

(2) On a : $\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \times \frac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

(3) • Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln a^n = n \ln a$.

– La propriété est vraie pour $n = 0$; en effet, on a : $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$.

– Supposons la propriété vraie pour un entier naturel k , c'est-à-dire : $\ln a^k = k \ln a$.

On a : $\ln a^{k+1} = \ln(a^k \times a) = \ln a^k + \ln a = k \ln a + \ln a = (k+1) \ln a$.

La propriété est vraie pour $k+1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln a^n = n \ln a$.

• Démontrons que : $\forall p \in \mathbb{Z}, \ln a^p = p \ln a$.

Soit p un entier relatif.

– Si p est positif, la propriété a déjà été démontrée.

– Si p est négatif, alors $-p$ est positif et on a : $\ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln a^{-p} = p \ln a$.

Donc : $\forall p \in \mathbb{Z}, \ln a^p = p \ln a$.

• Démontrons que : $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln a^r = r \ln a$.

Soit r un nombre rationnel. Il existe deux nombres entiers p et q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) tels que : $r = \frac{p}{q}$.

On a : $q \ln a^{\frac{p}{q}} = \ln \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = \ln a^p = p \ln a$; donc : $\ln a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln a$.

Donc : $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln a^r = r \ln a$.

Remarque

En particulier, pour tout nombre réel a strictement positif, on a : $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

2.2. Étude de la fonction $\ln$

Dérivée et conséquences

L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $]0 ; +\infty[$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Or : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{1}{x} > 0$; donc, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés 1

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

Remarque

En particulier, on a : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
 $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$;
 $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et son nombre dérivé est 1 ; on en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés 2

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

Propriétés 3

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

Démonstration

• La fonction $\ln$ est croissante. Si elle était majorée sur $]0 ; +\infty[$, elle admettrait une limite finie l en $+\infty$.

En posant $u = 2x$, on obtiendrait : $l = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 + \ln x) = \ln 2 + l$.

On aboutit à une contradiction, car $\ln 2 > 0$.

On en déduit que la fonction $\ln$ est croissante et non majorée sur $]0 ; +\infty[$;

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (cf. chapitre 9, § 1.3.).

• En posant $u = \frac{1}{x}$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\ln u) = -\infty$.

La droite (OJ) est asymptote à la courbe représentative de la fonction $\ln$.

Propriétés 4

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Démonstration

- Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $\ln$.

La fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Or : $\forall x \in]0; +\infty[, -\frac{1}{x^2} < 0$; donc $(\mathcal{C})$ est en tout point située au-dessous de sa tangente.

Une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = x - 1$.

On en déduit que : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x - 1 < x$.

Soit x un élément de $[1; +\infty[$.

On a : $0 \leq \ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$. Donc : $0 \leq \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$; c'est-à-dire : $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI) .

- En posant $u = \frac{1}{x}$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln u}{u}\right) = 0$.

Le nombre e

- La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$;

de plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Donc, la fonction $\ln$ est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

- On note e l'unique nombre réel tel que : $\ln e = 1$; e est appelé base du logarithme népérien.

On a : $e \approx 2,718\ 281\ 828\ 456$.

- Pour tout nombre rationnel r , on a : $\ln e^r = r \ln e = r$.

Remarque

La notation e a été donnée par EULER qui démontra que ce nombre est irrationnel. Le mathématicien Charles HERMITE démontra en 1873 que cette constante mathématique, presque aussi célèbre que π , est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être solution d'une équation polynômiale à coefficients entiers.

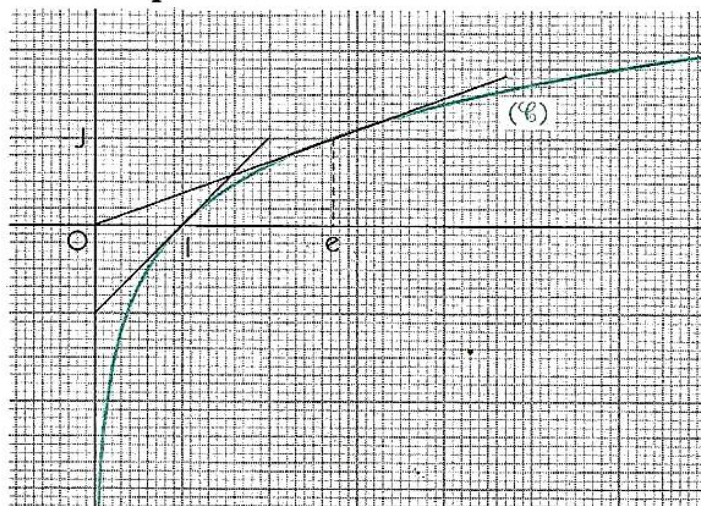
Courbe représentative de la fonction $\ln$

On déduit des paragraphes précédents le tableau de variation et la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction $\ln$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 1 et e .

Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln)'(x)$		+		
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Courbe représentative



Remarques

- La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1.
- La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e a pour équation : $y = \frac{1}{e}x$; donc, elle passe par l'origine du repère.

2.3. Travaux dirigés

1. Résolutions d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$\ln(2x-3) + 2 \ln(x+1) = \ln(6x-3) \quad (1)$$

$$(\ln x)^2 - 6 \ln x + 5 = 0 \quad (3)$$

$$\ln(x+2) = 1 + \ln(x-3) \quad (2)$$

$$(\ln x)^3 + 7 \ln x - 6 = 0 \quad (4).$$

Solution

Résolution de l'équation (1)

Contraintes sur l'inconnue :

$$\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x+1 > 0 \\ 6x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[.$$

Soit x élément de $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \ln[(2x-3)(x+1)^2] = \ln(6x-3) \\ &\Leftrightarrow (2x-3)(x+1)^2 = 6x-3 \\ &\Leftrightarrow x(2x^2+x-10) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(2x+5)(x-2) = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est : $\{2\}$.

Résolution de l'équation (3)

Contraintes sur l'inconnue : $x \in]0; +\infty[$.

Soit x élément de $]0; +\infty[$; posons : $X = \ln x$.

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow X^2 - 6X + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (X-1)(X-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x - 5) = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (3) est : $\{e; e^5\}$.

Résolution de l'équation (2)

Contraintes sur l'inconnue :

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]3; +\infty[.$$

Soit x élément de $]3; +\infty[$.

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \ln(x+2) = \ln[e(x-3)] \\ &\Leftrightarrow x+2 = e(x-3) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3e+2}{e-1}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est : $\left\{ \frac{3e+2}{e-1} \right\}$.

Résolution de l'équation (4)

Contraintes sur l'inconnue : $x \in]0; +\infty[$.

Soit x élément de $]0; +\infty[$; posons : $X = \ln x$.

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow X^3 + 7X - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (X+1)(X-3)(X+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 3)(\ln x + 2) = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (4) est : $\{e^{-2}; e^{-1}; e^3\}$.

M

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant :

- déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- se ramener à une ou plusieurs égalités de la forme : $\ln a = \ln b$.

2. Résolutions d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$\ln(x+2) + \ln(x+4) < \ln(x+8) \quad (1)$$

$$(1 - \ln x)(3 + \ln x) \geq 0 \quad (3)$$

$$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \quad (2)$$

$$(\ln x)^2 + 2 \ln x - 15 \leq 0 \quad (4).$$

Solution

Résolution de l'inéquation (1)

Contraintes sur l'inconnue :

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+4 > 0 \\ x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-2; +\infty[.$$

Soit x élément de $]-2; +\infty[$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \ln[(x+2)(x+4)] < \ln(x+8) \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+4) < x+8 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x < 0 \\ &\Leftrightarrow -5 < x < 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est : $]-5; 0[$.

Résolution de l'inéquation (2)

Contraintes sur l'inconnue :

$$\begin{cases} (x+2e)(x-2e) > 0 \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]2e; +\infty[.$$

Soit x élément de $]2e; +\infty[$.

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln(3ex) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < 3ex \\ &\Leftrightarrow (x+e)(x-4e) < 0 \\ &\Leftrightarrow -e < x < 4e. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est : $]2e; 4e[$.

Résolution de l'inéquation (3)

Contraintes sur l'inconnue : $x \in]0 ; +\infty[$.

Soit x élément de $]0 ; +\infty[$; posons : $X = \ln x$.

$$\begin{aligned}(3) \quad &\Leftrightarrow (1-X)(X+3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq X \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq \ln x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-3} \leq x \leq e.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est : $[e^{-3} ; e]$.

Résolution de l'inéquation (4)

Contraintes sur l'inconnue : $x \in]0 ; +\infty[$.

Soit x élément de $]0 ; +\infty[$; posons : $X = \ln x$.

$$\begin{aligned}(4) \quad &\Leftrightarrow X^2 + 2X - 15 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (X+5)(X-3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq X \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq \ln x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow e^{-5} \leq x \leq e^3.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (4) est : $[e^{-5} ; e^3]$.



Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes, on peut utiliser le procédé suivant :

- déterminer les contraintes sur l'inconnue ;
- se ramener à une ou plusieurs inégalités de la forme : $\ln a < \ln b$.

3. Calculs de limites

Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2 \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x} \quad ; \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1).$$

Solution

a) Soit x élément de $]0 ; +\infty[$; on a : $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x} \ln x)^2 = (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.

Posons : $u = \sqrt{x}$; on a : $\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 = \lim_{u \rightarrow 0} 4(u \ln u)^2 = 0$.

$$b) \text{ Soit } x \text{ élément de }]0 ; +\infty[\text{ ; on a : } x \ln \frac{x+1}{x} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Posons : $v = \frac{1}{x}$; on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln \frac{x+1}{x}) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1+v)}{v} = 1$.

$$c) \text{ Posons : } u = x-1 \text{ ; on a : } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{x-2} \ln(x-1) \right] = \lim_{u \rightarrow 1} \left[(u+1) \frac{\ln u}{u-1} \right].$$

Or : $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1$; donc : $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{x-2} \ln(x-1) \right] = 2$.

Exercices

2.a 1. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$:

$$\ln 8 \quad ; \quad \ln \frac{1}{16} \quad ; \quad \ln \sqrt{2} \quad ; \quad \ln 2\sqrt{2} \quad ; \quad \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 5$:

$$\ln 15 \quad ; \quad \ln 45 \quad ; \quad \ln \frac{25}{3} \quad ; \quad \ln 75\sqrt{5}.$$

2.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$\begin{aligned}a) 3 + \ln x &= 0 & b) \ln^2 x &= \ln x^2 \\ c) \ln(x^2 - 4x + 5) &= 0 & d) (x^2 - 1)\ln x &= 0 \\ e) \ln(2x + 1) + \ln(3 - x) &= \ln 3 + \ln(1 - 3x).\end{aligned}$$

2.c Développer l'expression $(x+1)(2x^2 - 5x + 2)$ et en déduire la résolution des équations suivantes.

$$\begin{aligned}a) 2 \ln^3(x+1) - 3 \ln^2(x+1) - 3 \ln(x+1) + 2 &= 0 \\ b) 2 \ln x + \ln(2x-3) &= \ln(3x-2).\end{aligned}$$

2.d Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \begin{cases} -2 \ln x + \ln y = 3 \\ 4 \ln x - 3 \ln y = -7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \ln x + \ln y = \ln 63 \end{cases}$$

2.e Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$\begin{aligned}a) 1 + \ln x &< 0 & b) \frac{x}{\ln x} &\leq 0 \\ c) (x-e) \ln(x-1) &> 0 & d) \ln(3x+2) &\leq \ln(x-1) \\ e) x \ln |x| &< 0 & f) \ln(3x+2) &\geq \ln(x-1) \\ g) 9 - \ln x^2 &> 0.\end{aligned}$$

2.f Calculer les limites suivantes.

$$\begin{aligned}a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) & \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x & \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2} & \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} \quad (k \in \mathbb{R}^*).\end{aligned}$$

3 Fonctions comportant $\ln$

3.1. Fonction $\ln \circ u$

Dérivée de $\ln \circ u$

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

La fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur K et on a : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Cette propriété découle du théorème de dérivation des fonctions composées.

La fonction $\ln \circ u$ est également notée $\ln u$.

Exemples

- Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 4)$.

Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2 - 4$; u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $u' : x \mapsto 2x$.

Donc, f est dérivable sur $]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 4}$.

- La fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

Primitives de $\frac{u'}{u}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle K .

La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur K la fonction $\ln \circ |u|$.

La fonction $\ln \circ |u|$ est également notée $\ln |u|$.

Démonstration

La fonction u est continue et ne s'annule pas sur K ; elle est donc de signe constant sur K .

- Si u est strictement positive sur K , alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur K et a pour dérivée $\frac{u'}{u}$.
- Si u est strictement négative sur K , alors la fonction $\ln \circ (-u)$ est dérivable sur K et a pour dérivée $\frac{u'}{u}$.

On en déduit que la fonction $\ln |u|$ est une primitive sur K de $\frac{u'}{u}$.

Exemples

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive sur $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \ln |x|$.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ a pour primitive sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ la fonction $x \mapsto -\ln(\cos x)$.
- La fonction $x \mapsto \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ a pour primitive sur $]1 ; 2[$ la fonction $x \mapsto \ln(-x^2 + 3x - 2)$.

3.2. Exemples d'études de fonctions

Dans ce paragraphe, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f .

Étude de la fonction $f : x \mapsto -1 + (\ln x)^2$

Ensemble de définition

On a : $D_f =]0 ; +\infty[$.

Dérivée et sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{2 \ln x}{x}$.

On a : $f'(1) = 0$;

$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]0; 1[$;

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]1; +\infty[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à $(\mathcal{C})$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

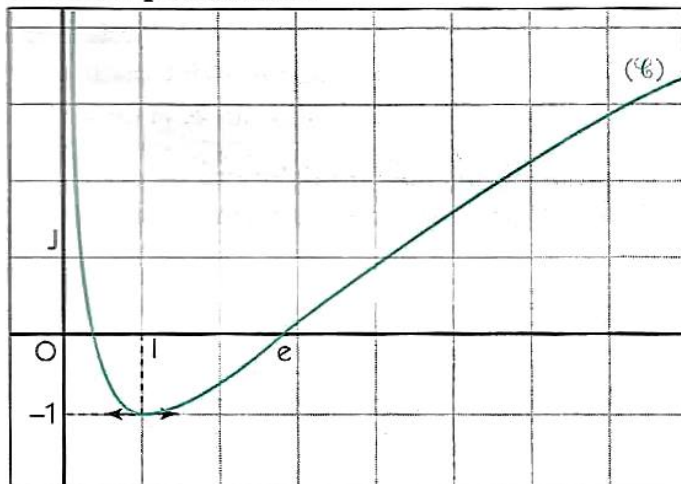
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} + 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \right] = 0.$$

Donc, $(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Courbe représentative



Étude de la fonction $f : x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Dérivée et sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

On a : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$;

$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]-1; 0[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| = 0$.

Donc, la droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C})$.

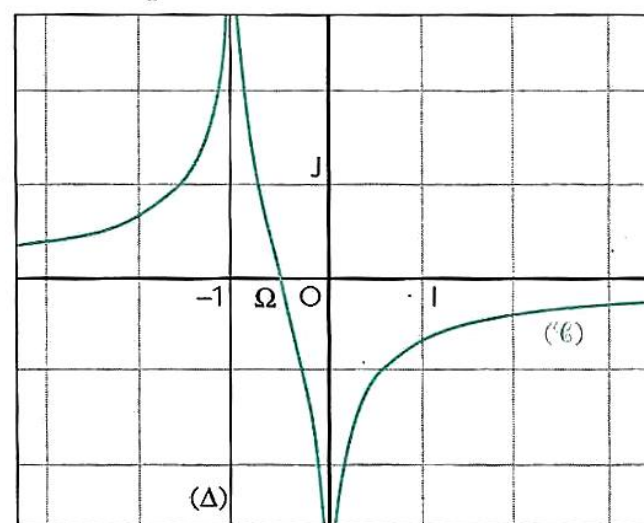
• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| = -\infty$; donc la droite (OJ) est asymptote à $(\mathcal{C})$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| = +\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	0

Courbe représentative



La courbe suggère et on démontre que $\Omega(-\frac{1}{2}; 0)$ est un centre de symétrie et un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

Exercices

3.a Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.

a) $f(x) = x^2 - 3 + \ln(-2x - 1)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 6)$

c) $f(x) = \ln(x - 1) + \ln(x - 6)$

d) $f(x) = \ln[(x - 1)(x - 6)]$.

3.b Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = \ln(\sin x)$ et $K =]0 ; \pi[$

b) $f(x) = \ln(\sin x^2)$ et $K =]0 ; \sqrt{\pi}[$

c) $f(x) = \tan(\ln x)$ et $K =]1 ; e[$

d) $f(x) = \ln\sqrt{x^3 - 3x}$ et $K =]-\sqrt{3} ; 0[$.

3.c Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ et $K =]2 ; +\infty[$

b) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ et $K =]-\infty ; 2[$

c) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ et $K =]0 ; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+3x+1}$ et $K = \mathbb{R}$.

3.d Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0\}, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

2. En déduire les primitives de f sur $] -1 ; 0[$.

3.e Le repère (O, I, J) est orthonormé. Déduire de la courbe représentative de $\ln$ celles des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto -\ln x$

b) $x \mapsto \ln(-x)$

c) $x \mapsto 2 - \ln x$

d) $x \mapsto 1 + \ln x$.

3.f Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

a) $x \mapsto x - \ln x$

b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

c) $x \mapsto x \ln x$

d) $x \mapsto 2 \ln(x+1) - \ln x$.

3.g Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

4 Logarithme décimal

4.1. Définition et propriétés

Les fonctions logarithmes sont les primitives sur $]0 ; +\infty[$ des fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$ ($k \in \mathbb{R}$), qui s'annulent en 1 (cf. § 2.1.). Ces fonctions sont de la forme : $x \mapsto k \ln x$.

Celle qui prend la valeur 1 en 10 est appelé fonction logarithme décimal. Elle est utilisée dans de nombreux domaines des sciences expérimentales.

On a : $k \ln 10 = 1$; donc : $k = \frac{1}{\ln 10}$.

Définition

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est la fonction : $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$.

- L'ensemble de définition de la fonction $\log$ est $]0 ; +\infty[$; le logarithme décimal de x est noté $\log x$.
- On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[, (\log)'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$.
- $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$.



La touche **log** d'une calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée du logarithme décimal de tout nombre réel strictement positif.

$\log 3 \approx 0,477\ 121$; $\ln \sqrt{2} \approx 0,150\ 514$; $\ln \frac{3}{4} \approx -0,124\ 938$; $\ln 0,003 \approx -2,522\ 878$.

Les propriétés de la fonction $\log$ se déduisent de celles de la fonction $\ln$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel r , on a :

$$(1) \log(ab) = \log a + \log b \quad ; \quad (2) \log \frac{1}{a} = -\log a ;$$

$$(3) \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad ; \quad (4) \log a^r = r \log a.$$

Remarque

En particulier, on a :

- pour tout nombre réel a strictement positif, $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$;
- pour tout nombre rationnel r , $\log 10^r = r$.

4.2. Utilisations du logarithme décimal

En arithmétique

1°) Démontrer que pour tout entier naturel p s'écrivant avec n chiffres, on a :

$$n = 1 + E(\log p), \text{ où } E \text{ désigne la fonction partie entière.}$$

2°) Le plus grand nombre entier premier connu en 1998 était : $p = 2^{3\,021\,377} - 1$.
Avec combien de chiffres s'écrit ce nombre ?

Solution

1°) Soit p un entier naturel.

p s'écrit avec n chiffres signifie que : $10^{n-1} \leq p < 10^n$.

La fonction $\log$ est strictement croissante, donc : $n - 1 \leq \log p < n$.

On en déduit que : $n - 1 = E(\log p)$, c'est-à-dire : $n = 1 + E(\log p)$.

2°) Tout d'abord, on peut vérifier qu'une calculatrice scientifique, même performante, ne permet pas de conclure. Utilisons la fonction $\log$.

On a : $\log(p + 1) = 3\,021\,377 \log 2$ et $\log 2 \approx 0,301\,029\,995$.

Donc : $\log(p + 1) \approx 909\,525,105\,2$.

On en déduit que $p + 1$ s'écrit avec 909 526 chiffres.

Or, $p + 1$ n'est pas de la forme 10^n , sinon on aurait $p = 10^n - 1$ et p serait multiple de 9.

Donc, $p + 1$ et p s'écrivent avec le même nombre de chiffres, c'est-à-dire avec 909 526 chiffres.

En chimie

On évalue l'acidité ou la basicité d'une solution aqueuse en calculant son pH (potentiel hydrogène) après avoir déterminé sa concentration en ions H_3O^+ (en moles par litre).

Toute solution aqueuse contient des ions H_3O^+ et des ions OH^- . On désigne respectivement par $[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ le nombre de moles par litre de H_3O^+ et de OH^- . On vérifie expérimentalement qu'à 25°C le produit $[H_3O^+] \times [OH^-]$ est constant et égal à 10^{-14} . De plus, on ne considère que des solutions acides ou basiques, de concentration maximale égale à 1 mole par litre.

Le pH d'une solution est définie par : $pH = -\log [H_3O^+]$.

1°) a) Sachant que dans l'eau pure on a $[H_3O^+] = [OH^-]$, calculer le pH de l'eau pure à 25°C.

b) Une solution est dite acide si elle contient plus de moles d'ions H_3O^+ que de moles d'ions OH^- , basique dans le cas contraire. Déterminer les inégalités vérifiant le pH d'une solution acide et le pH d'une solution basique.

2°) Le pH d'une solution d'acide fort est 2.

a) Quelle est sa concentration en ions H_3O^+ ?

b) Que devient cette concentration si le pH, après dilution, augmente de 1 ?

c) Quel volume d'eau pure faut-il ajouter à 10 cm³ d'une solution acide pour que son pH passe de 3 à 5 ?

3°) Quel volume d'eau pure faut-il ajouter à 10 cm³ d'une solution de base forte pour que son pH passe de 12 à 9 ?

Solution

La courbe ci-contre représente les variations de $[\text{OH}^-]$ en fonction de $[\text{H}_3\text{O}^+]$.

1°) a) On a : $[\text{H}_3\text{O}^+] \times [\text{OH}^-] = 10^{-14}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$;

donc : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7}$.

On en déduit que : $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] = 7$.

b) • On suppose que la solution est acide.

On a : $[\text{H}_3\text{O}^+] > [\text{OH}^-]$;

donc : $([\text{H}_3\text{O}^+])^2 > [\text{H}_3\text{O}^+] \times [\text{OH}^-]$;

c'est-à-dire : $([\text{H}_3\text{O}^+])^2 > 10^{-14}$;

d'où : $[\text{H}_3\text{O}^+] > 10^{-7}$.

De plus, $[\text{H}_3\text{O}^+] \leq 1$; d'où : $10^{-7} < [\text{H}_3\text{O}^+] \leq 1$.

On en déduit que : $-7 < \log([\text{H}_3\text{O}^+]) \leq 0$; donc : $0 \leq \text{pH} < 7$.

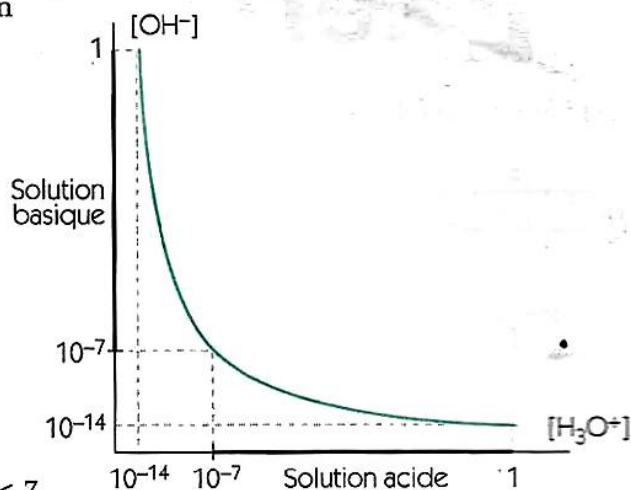
Le pH d'une solution acide est tel que : $0 \leq \text{pH} < 7$.

• En supposant la solution basique, on démontre de manière analogue que : $10^{-7} < [\text{OH}^-] \leq 1$;

donc : $10^{-14} \leq [\text{H}_3\text{O}^+] < 10^{-7}$ et $7 < \text{pH} \leq 14$.

Le pH d'une solution basique est tel que : $7 < \text{pH} \leq 14$.

Une solution dont le pH est égal à 7 est appelée solution neutre.



2°) a) On a : $\text{pH} = 2 \Leftrightarrow \log [\text{H}_3\text{O}^+] = -2$; donc : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2}$ moles/litre.

b) Si le pH augmente de 1, on a : $\text{pH} = 3$; donc : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-3}$ moles/litre.

La concentration est donc divisée par 10.

c) Les concentrations respectives en ions H_3O^+ de la solution initiale, de l'eau ajoutée et de la solution finale sont 10^{-3} , 10^{-7} et 10^{-5} .

Désignons par v le volume initial et par x le volume d'eau ajouté (exprimés dans la même unité).

On obtient : $v \cdot 10^{-3} + x \cdot 10^{-7} = (v + x) \cdot 10^{-5} \Leftrightarrow v \cdot 10^4 + x = (v + x) \cdot 10^2$.

On en déduit que : $x = \frac{10^4 - 10^2}{10^2 - 1} v = 10^2 \cdot v$.

Si $v = 10$, alors $x = 1\,000$. Il faut donc rajouter $1\,000 \text{ cm}^3$, c'est-à-dire 1 litre d'eau pure.

3°) Un raisonnement analogue, avec les mêmes notations, nous permet d'écrire :

$v \cdot 10^{-12} + x \cdot 10^{-7} = (v + x) \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow v + x \cdot 10^5 = (v + x) \cdot 10^3$.

On en déduit que : $x = \frac{10^3 - 1}{10^5 - 10^3} v = \frac{999}{99} \cdot 10^{-3} \cdot v$; donc : $x \approx 10^{-2} \cdot v$.

Si $v = 10$, alors $x = 0,1$. Il faut donc rajouter $0,1 \text{ cm}^3$, c'est-à-dire 0,1 millilitre d'eau pure.

Exercices

4.a Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\log(3x^2 - 4x + 1) = 1$

b) $6 - 5\log^2 x = 13 \log x$

c) $\frac{(x-1)(\log x + 1)}{\log x} = 0$.

4.b Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} \log(xy) = 2 \\ x + y = 29 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 9 \\ -6\log x + 5\log y = -19 \end{cases}$

4.c On donne : $\log 3,51 \approx 0,545\,31$.

1. Calculer les logarithmes de chacun des nombres suivants :

351 ; 35 100 ; 0,035 1 ; $(35,1)^2$; $\sqrt{0,351}$.

2. Déterminer les nombres qui ont pour logarithmes décimaux respectifs :

1,545 31 ; 0,454 69 ; 3,545 31 ; 0,060 59.

4.d Déterminer un entier naturel n tel que 2^n s'écrive avec le même nombre de chiffres que 1999^{69} .

Exercices

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

APPRENTISSAGE

Primitives

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur un intervalle K que l'on précisera.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 3x^2 - x + 7 & b) f(x) = 5x - 2 + \frac{4}{x^2} \\ c) f(x) = x + \frac{2}{x} & d) f(x) = \cos x - 5 \sin x \\ e) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} & f) f(x) = \sin \frac{x}{2} - 5 \cos 4x. \end{array}$$

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur un intervalle K que l'on précisera.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = (2x^2 + 1)^2 & b) f(x) = (x + 1)^2(x - 1) \\ c) f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^4} & d) f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

3 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 3(2 - 3x)^3 & b) f(x) = (x^2 + x + 1)(2x + 1) \\ c) f(x) = x^3(x^4 - 5)^2 & d) f(x) = 4x(x^2 - 1)^3. \end{array}$$

4 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{3x - 1}{(3x^2 - 2x - 1)^2} & \text{et } K =]-\frac{1}{3}; 1[\\ b) f(x) = \frac{2}{(1 + x)^4} & \text{et } K =]-1; +\infty[\\ c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2} & \text{et } K =]0; +\infty[\\ d) f(x) = -\frac{3x^2 + 2}{2(x^3 + 2x)^3} & \text{et } K =]-\infty; 0[. \end{array}$$

5 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur un intervalle K que l'on précisera.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} & b) f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 4x - 6}} \\ c) f(x) = x\sqrt{1 - x^2} & d) f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{(x^2 + 3x + 1)^3}}. \end{array}$$

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K , qui vérifie la condition indiquée.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \sin x \cos x, & K = \mathbb{R} & \text{et } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ b) f(x) = \cos x \sin^5 x, & K = \mathbb{R} & \text{et } F(0) = 3 \\ c) f(x) = 2x \sin x^2, & K = \mathbb{R} & \text{et } F(0) = 2 \\ d) f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}, & K =]0; \pi[& \text{et } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3. \end{array}$$

7 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sin x \cos x (\cos^2 x + 1)^4 & \text{et } K = \mathbb{R}; \\ b) f(x) = (1 + \tan^2 x) \tan^5 x & \text{et } K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ c) f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} & \text{et } K =]0; +\infty[\\ d) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} & \text{et } K = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[. \end{array}$$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \cos^4 x & b) f(x) = \sin^6 x \\ c) f(x) = \sin^5 x & d) f(x) = \cos^3 x \sin^2 x \\ e) f(x) = \cos^2 x \sin^2 x & f) f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x. \end{array}$$

9 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x - 2)^2}$.

1. Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 2)^2}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $]2; +\infty[$.

10 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1 - \sin x}$.

En remarquant que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

déterminer les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Fonction logarithme népérien

11 Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et k le nombre de ses diviseurs premiers. Démontrer que : $\ln n \geq k \ln 2$.

12 Simplifier les sommes suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \ln(\sqrt{3} + 1) + \ln(\sqrt{3} - 1) \\ b) \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) \\ c) \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \\ d) \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}). \end{array}$$

13 1. Calculer : $\ln \frac{1}{e}$; $\ln \sqrt{e}$; $\ln e\sqrt{e}$; $\ln \frac{\sqrt{e}}{e}$.

2. Simplifier : $\ln e^3 - \ln e^2$; $5 \ln \frac{1}{e} + 4 \ln e\sqrt{e}$.

14 Démontrer que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, on a : $\ln(1 + x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

15 Dans chacun des cas suivants, comparer les nombres réels x et y , sans utiliser de calculatrice.

$$\begin{array}{ll} a) x = \ln 5 & \text{et } y = \ln 2 + \ln 3 \\ b) x = 3 \ln 2 & \text{et } y = 2 \ln 3 \\ c) x = 4 \ln 3 & \text{et } y = 4 \ln 2 + \ln 5 \\ d) x = \ln \sqrt{e} & \text{et } y = \frac{1}{3}. \end{array}$$

16 Déterminer et construire les ensembles (E_1) , (E_2) , (E_3) , (E_4) des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient respectivement :

$$(E_1) \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$(E_2) \ln(x + y) = \ln x + \ln y$$

$$(E_3) \ln \frac{x+2y}{3} = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y)$$

$$(E_4) \ln|x| + \ln|y| = 0.$$

17 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Utiliser la courbe représentative de la fonction logarithme népérien pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto \ln \frac{1}{x}$$

$$b) x \mapsto |\ln x|$$

$$e) x \mapsto \ln(x+2)$$

$$d) x \mapsto \ln(x-1) + 2.$$

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

$$a) f(x) = \ln x^2$$

$$b) f(x) = \ln x + \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \ln[x(x+1)]$$

$$d) f(x) = \ln \frac{x-1}{2-x}.$$

19 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$$a) f(x) = \ln(x+1)$$

$$b) f(x) = \ln(2-x)$$

$$c) f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$$

$$d) f(x) = \ln \frac{x+1}{2-x}.$$

20 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$a) f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$b) f(x) = \frac{\ln x - 2}{2 \ln x + 1}$$

$$c) f(x) = \ln(3x) - \ln(x+1)$$

$$d) f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$e) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$f) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$h) f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

21 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0 (éventuellement à gauche et à droite).

$$a) f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$$

$$b) f(x) = \ln x + \ln^2 x$$

$$c) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$e) f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$f) f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$g) f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$$

$$h) f(x) = x^2 \ln^3 x.$$

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$a) (x-2) \ln(x-2) = 0$$

$$b) \ln(x^2 - x - 1) = 0$$

$$c) \ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$$

$$d) \ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln 45$$

$$e) \ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(5x-4)$$

$$f) \ln(2x+8) - \ln(3x+2) = \ln(x+1)$$

$$g) \ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 15$$

$$h) \ln|2x-5| - \ln|3x+2| = \ln|x+1|.$$

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$a) \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$$

$$b) \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x+11)$$

$$c) \ln(-x-2) = \ln \frac{-x-11}{x+3}$$

$$d) \ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3).$$

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$a) 3 \ln^2 x - 5 \ln x + 2 = 0$$

$$b) \ln^2 x + (1 - 2 \ln 2) \ln x - 2 \ln 2 = 0$$

$$c) 2 \ln^3(x+1) - 9 \ln^2(x+1) - 2 \ln(x+1) + 9 = 0$$

$$d) \ln^3 x + 2 \ln^2 x + \ln x + 2 = 0.$$

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$a) \ln(2x-e) > 1$$

$$b) \ln(2-3x) \geq 0$$

$$c) \ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$$

$$d) |\ln x| \leq 2$$

$$e) \ln(2x+1) \leq \ln(x+3)$$

$$f) \ln(x+2) \leq \ln(x^2-4)$$

$$g) \ln \frac{1}{x} \geq \ln x.$$

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$a) (1 - \ln x)(2 + \ln x) \geq 0$$

$$b) \ln^2 x - 2 \ln x - 3 \geq 0$$

$$c) \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} \geq 0$$

$$d) \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} > \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

27 Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 2 - e \\ \ln(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \\ \ln x - \ln y = 2 \ln \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \ln x + 3 \ln y = 1 \\ 3 \ln x - 2 \ln y = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Fonctions comportant $\ln$

28 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.

$$a) f(x) = x \ln|x|$$

$$b) f(x) = \ln^2 x$$

$$c) f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

$$e) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$h) f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

29 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa dérivée.

$$a) f(x) = \ln(-x)$$

$$b) f(x) = \ln(2x+1)$$

$$c) f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$d) f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 4)$$

$$e) f(x) = \ln \frac{2}{x}$$

$$f) f(x) = \ln \frac{x+1}{x-2}$$

$$g) f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+4} \right|$$

$$h) f(x) = \cos(\ln x).$$

30 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la dérivabilité de f en 1.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

31 Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 3x^2 + 2x + 1, & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x + 1 + \ln(x+1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
 b) Étudier la dérivabilité de g en 0.
 Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

32 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

- a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $K = \mathbb{R}$
 b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ et $K =]-2; +2[$
 c) $f(x) = 2 + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$ et $K =]-\infty; -2[$
 d) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$ et $K =]-\infty; -1[$.

33 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

- a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $K =]0; +\infty[$
 b) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et $K =]0; +\infty[$
 c) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et $K =]0; \frac{\pi}{2}[$
 d) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ et $K =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$
 e) $f(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$ et $K =]0; \frac{\pi}{2}[$.

34 Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = a + \frac{b}{x-2}.$$

En déduire une primitive de f sur $]2; +\infty[$.

- a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{1-2x}{x-2}$
 c) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$ d) $f(x) = \frac{-3x}{x-2}$.

35 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$.

1. Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{2}\}, f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

36 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-3)^2}$.

1. Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}.$$

2. En déduire la primitive F de f sur $]3; +\infty[$, telle que : $F(2) = 5$.

37 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}$.

1. Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

2. En déduire la primitive F de f sur $]1; +\infty[$, telle que : $F(-1) = -\ln 2$.

38 Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

Déterminer successivement les primitives sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ de chacune des fonctions $f+g$, $f-g$, f et g .

39 Vérifier que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis déterminer sa dérivée.

En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$.

40 Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

- a) $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + 2 \ln x$ b) $f(x) = \frac{3 - \ln x}{2 - \ln x}$
 c) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ d) $f(x) = \ln x^2$.

41 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln |x|, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- Justifier que f est continue en 0.
- Démontrer que f est impaire.
- Étudier f et tracer sa courbe représentative.

42 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(3-x).$$

- Étudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.
- a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe (OI) en un seul point Ω dont on déterminera les coordonnées.
 b) Démontrer que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.
- Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en Ω .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dont on précisera un encadrement à 10^{-1} près.
- Résoudre graphiquement l'inéquation : $x - 1 \leq f(x)$.

43 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition D de f et démontrer que : $\forall x \in D, f(x) > x + |x|$.
- En déduire le signe de $f(x)$ sur D .

2. Étudier f et tracer sa courbe représentative.

3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- Résoudre l'équation : $g(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$.
- Démontrer que g est une fonction impaire.
- Étudier g et tracer sa courbe représentative.
- Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que :
 $\forall n \in \mathbb{Z}, g\left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = n$.

APPROFONDISSEMENT

44 On se propose de démontrer que la fonction $\ln$ n'est pas la restriction à $]0; +\infty[$ d'une fonction rationnelle.

- Démontrer qu'il n'existe pas de fonction rationnelle f telle que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 0$.

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux fonctions polynômes et supposer que $P(0) \neq 0$ et $Q(0) = 0$.)

2. En déduire que la fonction $\ln$ n'est pas la restriction à $]0; +\infty[$ d'une fonction rationnelle.

45 Soit a et b deux nombres réels ($0 < a < b$) et la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$.

- Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ f est-elle définie ? dérivable ? Déterminer sa dérivée f' .
- Soit g la fonction définie par :
 $g(x) = a(bx+1) \ln(bx+1) - b(ax+1) \ln(ax+1)$.

Déterminer g' . En déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\frac{1}{b}; 0[$ et $]0; +\infty[$.

3. Démontrer que : $\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right) \ln\left(\frac{b}{a} + 1\right) < (\ln 2)^2$.

46 Fonction logarithme de base a .

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Soit f_a la fonction de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ et $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative.

1. a) Calculer $f_a(1)$, $f_a(a)$, $f_a(a^n)$ où n est un entier relatif.

b) Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs x, y et tout entier relatif n , on a :

$$\bullet f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y) \quad \bullet f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)$$

$$\bullet f_a(x^n) = n f_a(x) \quad \bullet f_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} f_a(x).$$

c) Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs a, b et x , on a :

$$\bullet f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)} \quad \bullet f_a(x) = f_a(b) f_b(x).$$

f_a est appelée fonction logarithme de base a .

2. a) Étudier la fonction f_a et dresser son tableau de variation pour $0 < a < 1$ et $a > 1$.

b) Démontrer que f_a est une bijection.

c) Démontrer que $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$ et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}})$.

3. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$.

47 Pour tout entier relatif k , on définit la fonction

f_k de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f_k(0) = 0 \\ f_k(x) = x(k - \ln x), \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}_k)$ la courbe représentative de f_k .

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_k en 0.

2. Pour tout nombre réel a strictement positif, on désigne par A_k le point de $(\mathcal{C}_k)$ d'abscisse a et par (T_k) la tangente à $(\mathcal{C}_k)$ en A_k .

a) Déterminer une équation de (T_k) .

b) Déterminer le point d'intersection de (T_k) et (OJ) .

c) En déduire que, lorsque k varie dans $\mathbb{Z}$, les tangentes (T_k) sont concourantes en un point de l'axe (OJ) .

3. a) Pour k fixé, étudier les variations de f_k .

b) En déduire les tableaux de variation de f_0, f_1 et f_2 .

4. Construire sur le même graphique $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Faire apparaître sur le graphique :

• les tangentes à $(\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ aux points d'abscisse 1 et leur point d'intersection.

• les tangentes à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ aux points d'abscisse e et leur point d'intersection.

• la tangente à $(\mathcal{C}_2)$ au point d'abscisse e^2 et son point d'intersection avec (OJ) .

48 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + 1 + 3 \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right| \right).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

1. Étudier les variations de la fonction f .

2. a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion Ω et que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

b) Déterminer l'asymptote oblique (D) de $(\mathcal{C})$ et vérifier que Ω appartient à (D) .

c) Tracer $(\mathcal{C})$.

49 Soit la fonction $f: x \mapsto \ln |\ln x|$.

1. Étudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel m , l'équation $\ln |\ln x| = m$ admet deux solutions x_1 et x_2 .

b) Calculer le produit $x_1 x_2$.

50 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f .

c) Étudier les variations de f .

Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

d) Tracer $(\mathcal{C})$.

2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.

Tracer la courbe représentative de h^{-1} .

51 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Pour tout nombre réel m , on définit la fonction f_m par :

$$f_m(x) = \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m .

1. Étudier f_m et tracer $(\mathcal{C}_m)$ dans les cas suivants :

$m = 0$, $m = -1$ et $m = 1$.

Dans la suite, on suppose que : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

2. a) Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f_m .

On désigne par D_m l'ensemble de définition de f_m .

b) Démontrer que les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par deux points fixes.

3. a) Démontrer que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$ et que pour tout élément x de D_m , on a : $f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$.

En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{m}})$.

b) Démontrer que :

$$\bullet (x \in D_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in D_m);$$

$$\bullet \forall x \in D_{-m}, f_{-m}(x) = f_m(-x).$$

En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{-m})$.

c) Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer $(\mathcal{C}_m)$ pour $m > 1$ pour obtenir toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$.

4. On suppose dans cette question que : $m > 1$.

a) Étudier f_m et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le tracé de $(\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$ et $(\mathcal{C}_{-2})$.

Soit Ω le point d'intersection de $(\mathcal{C}_2)$ et de son asymptote parallèle à (OI) .

Démontrer que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_2)$.

c) Soit g la restriction de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$.

Démontrer que g réalise une bijection de $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de g et de g^{-1} .

52 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|.$$

a) Étudier f et dresser son tableau de variation.

b) Calculer $f(0)$; en déduire le signe de f .

2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = x \ln|x-1|$.

a) Étudier g et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.

b) Soit A le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OI) , d'abscisse non nulle.

Démontrer que A est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$ et écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A .

3. On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1; +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de h et de h^{-1} .

53 Soit α un élément de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et f_α la fonction définie par : $f_\alpha(x) = \ln(4x^2 - 4x \sin \alpha + 1)$.

On désigne par $(\mathcal{C}_\alpha)$ la courbe représentative de f_α .

1. a) Déterminer, suivant les valeurs de α , l'ensemble de définition de f_α .

b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2} \sin \alpha$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_\alpha)$.

c) Démontrer que $(\mathcal{C}_\alpha)$ et $(\mathcal{C}_{-\alpha})$ sont symétriques par rapport à (OJ) .

2. a) Étudier f_α pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et tracer sur le même graphique les courbes $(\mathcal{C}_{\frac{\pi}{2}})$ et $(\mathcal{C}_{-\frac{\pi}{2}})$.

b) Démontrer que pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, l'équation $f_\alpha(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

54 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit m un nombre réel strictement positif et f_m la fonction définie par : $f_m(x) = \ln(mx) + \frac{m}{\ln x}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m .

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m et étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_m)$.

b) Déterminer la dérivée de f_m et démontrer que l'ensemble des extremums de $(\mathcal{C}_m)$, lorsque m décrit $]0; +\infty[$, est la courbe (Γ) d'équation : $y = 2 \ln(x |\ln x|)$.

c) Étudier la fonction $x \mapsto 2 \ln(x |\ln x|)$ et tracer (Γ) .

Dans la suite du problème, on suppose que : $m = 1$.

2. a) Étudier la fonction f_1 et tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

b) On désigne par g la restriction de f_1 à l'intervalle $[e; +\infty[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

Tracer la courbe représentative de g^{-1} .

3. a) Démontrer que $(\mathcal{C}_1)$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse α est solution de l'équation :

$$(\ln x)^3 - \ln x - 2 = 0.$$

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

55 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit m un nombre réel non nul et f_m la fonction définie par : $f_m(x) = mx + 1 + \ln(mx)$.

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m .

1. a) Déterminer, suivant les valeurs de m , l'ensemble de définition de f_m .

b) Démontrer que pour tout nombre réel m , les courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{-m})$ sont symétriques par rapport à (OJ) .

c) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_m)$ pour $m > 0$.

2. a) Étudier la fonction f_2 puis tracer les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_{-2})$.

b) Démontrer que l'équation $f_2(x) = 0$ admet une unique

solution dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.

c) Démontrer que f_2 et f_{-2} réalisent des bijections de leurs ensembles de définition vers $\mathbb{R}$ et préciser la position relative des courbes représentatives de leurs fonctions réciproques.

56 1. Soit la fonction $g : x \mapsto x^3 - x + 1 - 2 \ln x$. Étudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Étudier la fonction f et tracer $(\mathcal{C})$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Soit la fonction $h : x \mapsto x + \ln x$.

Étudier la fonction h et en déduire que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point unique dont on déterminera l'abscisse α à 10^{-2} près.

57 L'impression sonore est proportionnelle au logarithme de l'intensité sonore. On définit le niveau sonore par $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$, où I est l'intensité sonore et I_0 une intensité sonore de référence.

1. Sachant que l'intensité sonore est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la pression acoustique P , démontrer que $N = 20 \log \frac{P}{P_0}$, P_0 étant la pression acoustique correspondant à I_0 .

2. Lorsque P est exprimée en pascals (Pa), N est exprimé en décibels (dB).

Sachant que $P_0 = 20 \times 10^{-6}$ Pa (son à 1 000 Hz), calculer les niveaux sonores respectifs correspondant aux pressions acoustiques $P_1 = 12 \times 10^{-3}$ Pa (niveau moyen de la voix) et $P_2 = 30 \times 10^{-2}$ Pa (bruit insupportable).

3. Quelle est la pression acoustique correspondant à un niveau sonore de 80 dB ? de 70 dB ?

58 Sismologie.

Pour évaluer la puissance d'un séisme, on a défini une quantité, appelée magnitude, liée à l'énergie développée au foyer du séisme. L'échelle de magnitude, ou échelle de RICHTER, permet de comparer les énergies développées par différents séismes :

- un séisme de magnitude 3 correspond à une secousse ressentie sur une surface peu étendue ;
- un séisme de magnitude 4,5 peut causer des dégâts légers et de magnitude 6 des dégâts importants ;
- les plus grands séismes enregistrés ont une magnitude comprise entre 7 et 8,5 ;
- on estime que le séisme de plus forte magnitude, voisine de 9, a été celui de Lisbonne, en 1755.

L'énergie libérée au foyer d'un séisme étant notée E , la magnitude correspondante M est donnée par la formule : $\log E = 11,4 + 1,5 M$.

1. Comparer les puissances de deux séismes de magnitudes respectives 3 et 7.

2. Calculer la magnitude du séisme de Skopje, en 1963, sachant que l'énergie libérée a été 1 000 fois supérieure à celle libérée par un séisme de magnitude 4.

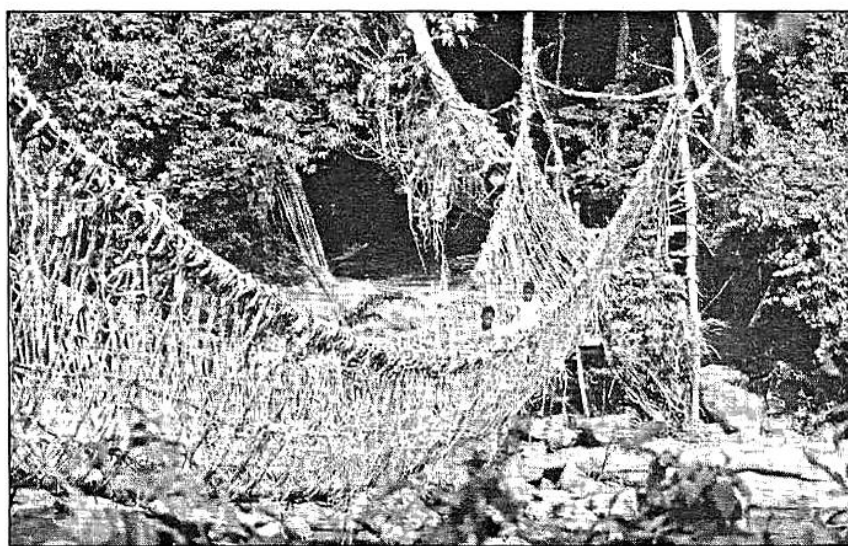
3. Comparer les puissances des séismes de Skopje ($M = 6$) et de Los Angeles ($M = 7,5$), en 1971, à celui de Lisbonne ($M = 9$) en 1755.

Fonctions exponentielles – Fonctions puissances

Introduction

Les ponts de liane font partie du paysage africain. La courbe dessinée par ces ouvrages, de même que celle engendrée par le câble téléphonique suspendu entre deux poteaux, est appelée « chaînette » : c'est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

GALILÉE s'intéressa à cette courbe, qu'il pensait être une parabole. Ce n'est qu'en 1691 que BERNOULLI, HUYGHENS et LEIBNITZ en déterminèrent une équation.



© J. Joffre / Hooqui.

Un pont de liane.

SOMMAIRE

1. Fonction exponentielle	256
2. Fonctions comportant exp	260
3. Fonctions puissances	265

1 Fonction exponentielle

1.1. Définition et propriétés

Définition

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$.

Définition

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

- L'exponentielle d'un nombre réel x est notée $\exp x$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x > 0$.
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$;
 $\forall x \in]0; +\infty[, \exp(\ln x) = x$.
- On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \exp x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]0; +\infty[\\ x = \ln y \end{cases}$
- $\exp 0 = 1$; $\exp 1 = e$; $\exp(-1) = \frac{1}{e}$.



En appuyant successivement sur les touches **inv** **ln** d'une calculatrice, on obtient une valeur approchée de l'exponentielle d'un nombre réel.

$\exp 1 \approx 2,718\ 28$; $\exp(-1) \approx 0,367\ 87$; $\exp \sqrt{3} \approx 5,652\ 23$; $\exp 200 \approx 7,225\ 97 \times 10^{86}$.

Notation e^x

Soit r un nombre rationnel. On a : $\ln(\exp r) = r = \ln e^r$.

On en déduit que : $\forall r \in \mathbb{Q}, \exp r = e^r$.

On convient d'étendre cette écriture à tout nombre réel x ; on a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$.

On en déduit que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$;
 $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln x} = x$.
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]0; +\infty[\\ x = \ln y \end{cases}$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Propriétés

Propriété fondamentale

Pour tous nombres réels a et b , on a : $e^{a+b} = e^a e^b$.

Démonstration

Soit a et b deux nombres réels.

On a : $\ln e^{a+b} = a+b = \ln e^a + \ln e^b = \ln(e^a e^b)$.

On en déduit que : $e^{a+b} = e^a e^b$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r , on a :

$$(1) e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad (2) e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ; \quad (3) e^{ra} = (e^a)^r.$$

Démonstration

Soit a et b deux nombres réels, r un nombre rationnel.

(1) On a : $e^a e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1$; donc : $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

(2) On a : $e^{a-b} = e^a e^{-b} = e^a \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$.

(3) On a : $\ln e^{ra} = ra = r \ln e^a = \ln(e^a)^r$; donc : $e^{ra} = (e^a)^r$.

1.2. Étude de la fonction exponentielle

Sens de variation

La fonction exp varie dans le même sens que sa fonction réciproque, la fonction ln ; elle est donc strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0	1	e	$+\infty$

On en déduit le tableau de variation ci-contre.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$;
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.

Remarque

En particulier, on a : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$;

$$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 ;$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Courbe représentative

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

On désigne respectivement par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien, par (Δ) la droite d'équation : $y = x$.

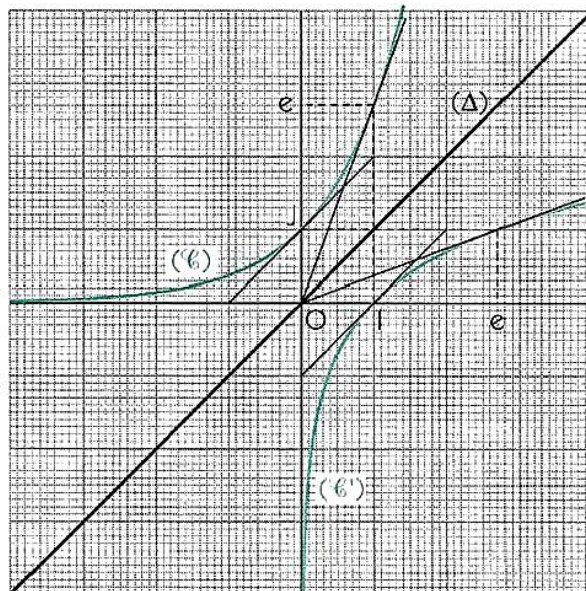
• $(\mathcal{C})$ se déduit de $(\mathcal{C}')$ par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) .

• La tangente à $(\mathcal{C}')$ en I a pour coefficient directeur 1 ; donc, la tangente à $(\mathcal{C})$ en J a pour coefficient directeur 1.

• La tangente à $(\mathcal{C}')$ au point de coordonnées $(e ; 1)$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{e}$ et passe par O ; donc, la tangente à $(\mathcal{C})$ au point de coordonnées $(1 ; e)$ a pour coefficient directeur e et passe par O.

• $(\mathcal{C}')$ est en tout point située au-dessous de sa tangente ; donc, $(\mathcal{C})$ est en tout point située au-dessus de sa tangente. En particulier, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de sa tangente en J ;

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x + 1$.



Dérivée et conséquences

La fonction ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout élément x de cet intervalle, on a : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Or : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{1}{x} \neq 0$; donc, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = \frac{1}{(\ln)'(\exp x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 1

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , on a : $(\exp)'(x) = \exp x$.

La fonction exponentielle a la particularité d'être égale à sa dérivée.

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et son nombre dérivé est 1.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Propriétés

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ;$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ;$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ;$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0.$$

Démonstration

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0 ; +\infty[$; on en déduit les propriétés (1) et (2).

La droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

$$(3) \text{ Posons : } X = e^x ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = +\infty.$$

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

$$(4) \text{ Posons : } X = -x ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{X}{e^X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0.$$

1.3. Travaux dirigés

1. Résolutions d'équations et d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 = 0 \quad (1)$$

$$3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2} \quad (2)$$

$$3e^x - 7e^{-x} + 20 \leq 0 \quad (3)$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \geq 2 \quad (4).$$

Solution

Résolution de l'équation (1)

Posons : $X = e^x$.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Leftrightarrow X^3 - 3X^2 - X + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow (X-1)(X+1)(X-3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (e^x-1)(e^x+1)(e^x-3) = 0. \end{aligned}$$

L'équation $e^x + 1 = 0$ n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est : $\{0 ; \ln 3\}$.

Résolution de l'équation (2)

Posons : $X = e^x$.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \Leftrightarrow e(3X^2 + X - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (X+1)(3X-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (e^x+1)(3e^x-2) = 0. \end{aligned}$$

L'équation $e^x + 1 = 0$ n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est : $\{\ln 2 - \ln 3\}$.

Résolution de l'équation (3)

Posons : $X = e^x$.

$$\begin{aligned}(3) \quad &\Leftrightarrow 3X - \frac{7}{X} + 20 \leq 0 \\&\Leftrightarrow \frac{(3X-1)(X+7)}{X} \leq 0 \\&\Leftrightarrow \frac{(3e^x-1)(e^x+7)}{e^x} \leq 0 \\&\Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{3} \\&\Leftrightarrow x \leq -\ln 3.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est :
 $]-\infty; -\ln 3]$.

Résolution de l'équation (4)

Contrainte sur l'inconnue : $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}(4) \quad &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-3}{e^{2x}-1} \leq 0 \\&\Leftrightarrow 1 < e^{2x} \leq 3 \\&\Leftrightarrow 0 < 2x \leq \ln 3 \\&\Leftrightarrow 0 < x \leq \ln \sqrt{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (4) est :
 $]0; \ln \sqrt{3}]$.

2. Calculs de limites

Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} ; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} ; \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) ; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}.$$

Solution

$$a) \text{ Posons : } X = e^x. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{3X - 2}{5X + 3} = \frac{3}{5}.$$

$$b) \text{ Posons : } X = e^x. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

$$c) \text{ On a : } x - e^x = x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right). \text{ Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = -\infty.$$

$$d) \text{ On a : } \frac{\sin 2x}{1 - e^x} = (-2) \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}.$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x} = -2.$$

Exercices

1.a Écrire plus simplement les expressions suivantes.

$$a) \frac{e^{1+\ln 2}}{e^{2+\ln 3}}$$

$$b) e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(x-2)}$$

$$c) \frac{e^{x^2-4}}{e^{x+2}}$$

$$d) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2.$$

1.b Résoudre les équations suivantes.

$$a) e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$b) e^{2x+1} + 3e^{x+1} = 4e$$

$$c) e^{\sin x} = \sqrt{e}$$

$$d) 4e^{-x} = e^x.$$

1.c Résoudre les inéquations suivantes.

$$a) \frac{2e^x + 1}{e^x - 3} > 0$$

$$b) e^{2(x+1)} + 3e^{x+2} < 4e^2$$

$$c) 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} \leq 2e$$

$$d) 2e^{1+2\sqrt{x}} - 13e^{\sqrt{x}+1} + 22e > 0.$$

1.d Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto (x-4)e^x$$

$$b) x \mapsto (x^2 + 1)e^{-x} - x$$

$$c) x \mapsto \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x + 1}.$$

2

Fonctions comportant exp

2.1. Dérivée et conséquence

Dérivée de $\exp \circ u$

Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'énoncer la propriété suivante.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur K et on a : $(\exp \circ u)' = u' \times (\exp \circ u)$.

La fonction $\exp \circ u$ est également notée e^u ; sa dérivée est alors $u'e^u$.

Exemples

- La fonction $x \mapsto e^{-x^2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto (-2x + 1)e^{-x^2+x}$.
- La fonction $x \mapsto e^{\sin x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \cos x e^{\sin x}$.
- La fonction $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.

Primitives de $u'e^u$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur K la fonction e^u .

Exemples

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-x^2}$.
- Une primitive sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ est la fonction $x \mapsto e^{\tan x}$.

2.2. Exemples d'études de fonctions

Dans ce paragraphe, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f .

Étude de la fonction $f: x \mapsto e^{-x^2}$

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

f est une fonction paire ; donc, on restreint son étude à l'intervalle $[0; +\infty[$, on trace la courbe correspondant à cet intervalle et on complète par la symétrie orthogonale d'axe (O) .

Dérivée et sens de variation

La fonction f est la composée des fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -2xe^{-x^2}$.

On a : $f'(0) = 0$;

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$; donc, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Étude aux bornes de $[0; +\infty[$

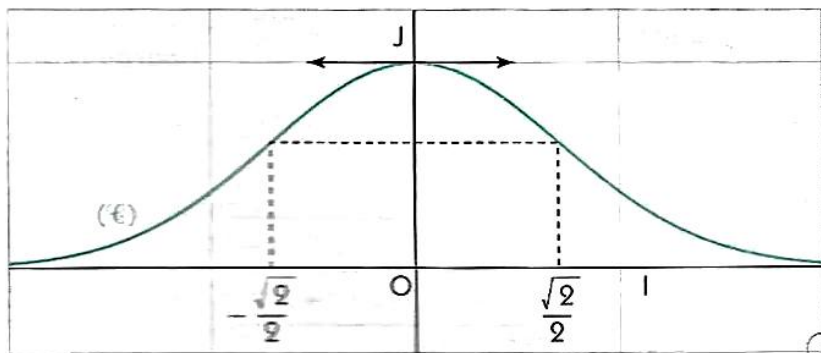
Posons : $X = -x^2$; on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.

Donc, la droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	0

Courbe représentative



f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

f'' s'annule et change de signe en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(C) admet donc deux points d'inflexion d'abscisses $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque

De la courbe précédente, on déduit celle de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

La courbe représentative de cette fonction, très souvent utilisée en statistiques et en probabilités, est appelée courbe « en cloche » ou courbe de Gauss.

Étude de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la continuité de f en 0.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

$$\text{Posons : } X = \frac{1}{x}. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty.$$

Donc, f n'est pas continue en 0.

Dérivée et sens de variation

• La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{x-1}{2x} e^{\frac{1}{x}}$.

$$\text{On a : } f'(1) = 0;$$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$;

$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$; donc, f est décroissante sur $]0; 1[$.

• La fonction g n'est pas continue en 0 ; donc, elle n'est pas dérivable en 0.

$$\text{Cependant, on a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Donc, f admet 0 pour nombre dérivé à gauche en 0 et (C) admet en 0 une demi-tangente de support (OI).

Étude aux bornes de l'ensemble d'étude

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Étudions la branche infinie de (C) en $+\infty$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Posons : } X = \frac{1}{x}. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{e^X - 1}{X} = \frac{1}{2}.$$

Donc, la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}(x + 1)$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que la droite (Δ) est asymptote à (C) en $-\infty$.

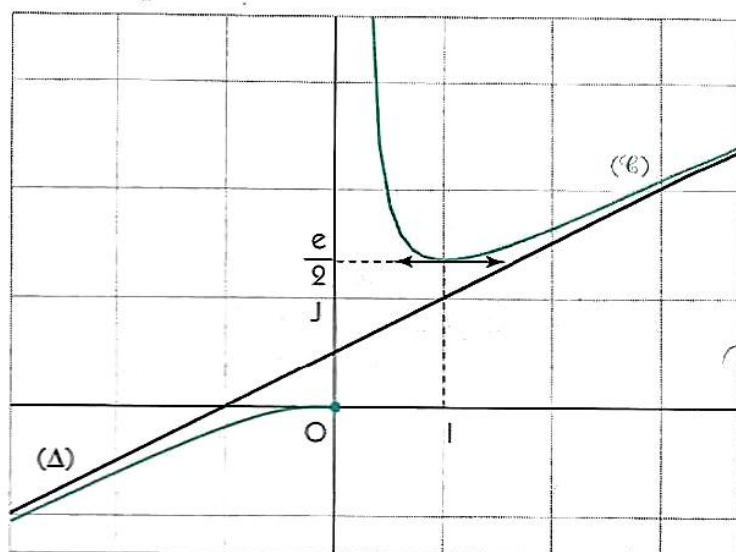
- On a vu que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Donc, la droite (OJ) est asymptote à (C).

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		- 0 +	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$

Courbe représentative



2.3. Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

Définition et propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif.

On a : $\forall r \in \mathbb{Q}, a^r = e^{r \ln a}$.

On convient d'étendre cette écriture à tout nombre réel x ; on a : $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}$.

Ceci nous conduit à la définition suivante.

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout nombre réel x , on a : $a^x = e^{x \ln a}$.
- On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction : $x \mapsto a^x$.

Remarques

- La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
- La fonction exponentielle de base 10 est la fonction réciproque de la fonction logarithme décimal.
- La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

Propriété 1

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel x , on a : $\ln a^x = x \ln a$.

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition précédente.

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés 2

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y , on a :

$$(1) \quad a^{x+y} = a^x a^y \quad ; \quad (2) \quad a^{-y} = \frac{1}{a^y} \quad ; \quad (3) \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} ;$$

$$(4) \quad (ab)^x = a^x b^x \quad ; \quad (5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad ; \quad (6) \quad (a^x)^y = a^{xy} .$$

Remarque

Pour tout nombre réel a strictement positif, on a également : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Étude de la fonction $f_a : x \mapsto a^x$

Dans cette étude, $(\mathcal{C}_a)$ désigne la courbe représentative de la fonction f_a et a est différent de 1.

Ensemble de définition

On a : $D_{f_a} = \mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}$; donc, la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f'_a telle que : $f'_a(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = a^x \ln a$.

f'_a est du signe de $\ln a$; on distingue deux cas : $0 < a < 1$ et $a > 1$.

1^{er} cas : $0 < a < 1$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) < 0$;
donc, f_a est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2^e cas : $a > 1$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) > 0$;
donc, f_a est croissante sur $\mathbb{R}$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

1^{er} cas : $0 < a < 1$

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.

La droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C}_a)$ en $+\infty$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln a \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \right) = -\infty.$$

$(\mathcal{C}_a)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2^e cas : $a > 1$

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

La droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C}_a)$ en $-\infty$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln a \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \right) = +\infty.$$

$(\mathcal{C}_a)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

Tableau de variation

1^{er} cas : $0 < a < 1$

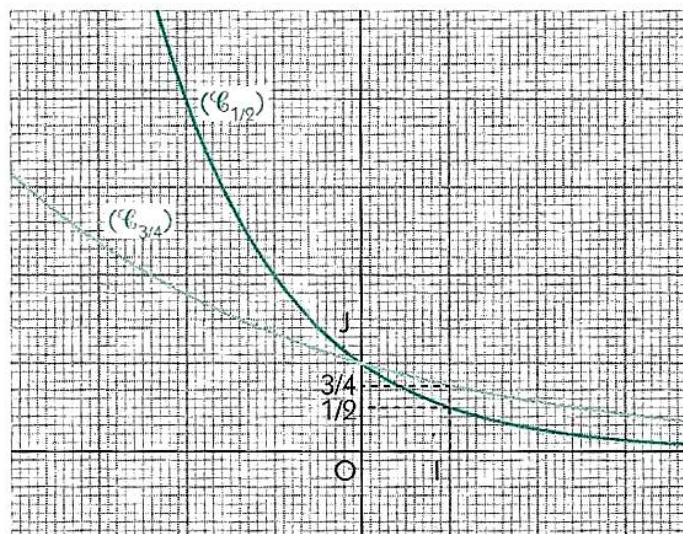
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$			-	
$f_a(x)$	$+\infty$	1	a	0

2^e cas : $a > 1$

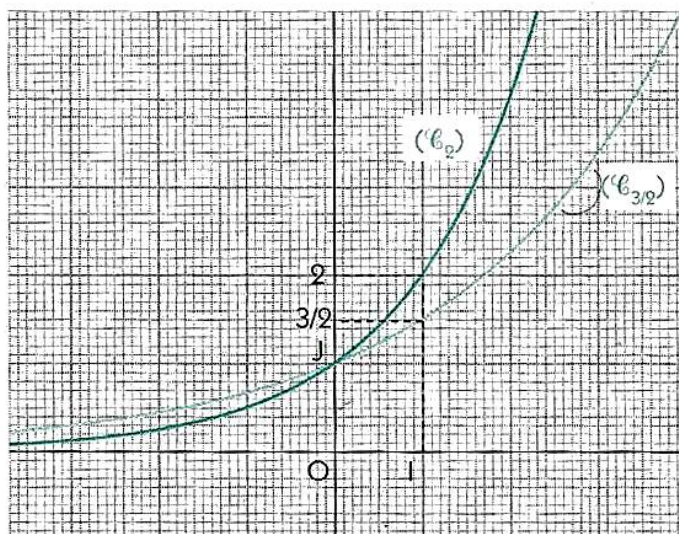
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$			-	
$f_a(x)$	0	1	a	$+\infty$

Courbe représentative

1^{er} cas : $0 < a < 1$



2^e cas : $a > 1$



2.4. Travaux dirigés

1. La chaînette

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

1°) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$.

2°) À tout nombre réel x , on associe les points M et M' appartenant respectivement aux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et ayant la même abscisse x . Soit P le milieu de $[MM']$.

a) Démontrer que, lorsque x décrit $\mathbb{R}$, le lieu géométrique de P est la courbe représentative (Γ) de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

b) Étudier les variations de φ et tracer (Γ) sur le même graphique que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

La courbe obtenue est la « chaînette » citée en introduction de ce chapitre.

Solution

1°) La fonction f a été étudiée au paragraphe 1.2.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$; donc $(\mathcal{C}_g)$ se déduit de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) .

2°) a) Soit x un nombre réel.

Désignons par $y_M, y_{M'}$ et y_P les ordonnées respectives des points M, M' et P .

On a : P milieu de $[MM'] \Leftrightarrow y_P = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$

$$\Leftrightarrow y_P = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P \in (\Gamma).$$

Donc, lorsque x décrit $\mathbb{R}$, le lieu géométrique de P est la courbe (Γ) .

b) • On a : $D_\varphi = \mathbb{R}$.

φ est une fonction paire ; donc, on restreint son étude à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

• La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $\varphi' : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$.

On a : $\varphi'(0) = 0$;

$\forall x \in]0 ; +\infty[, \varphi'(x) > 0$; donc, φ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

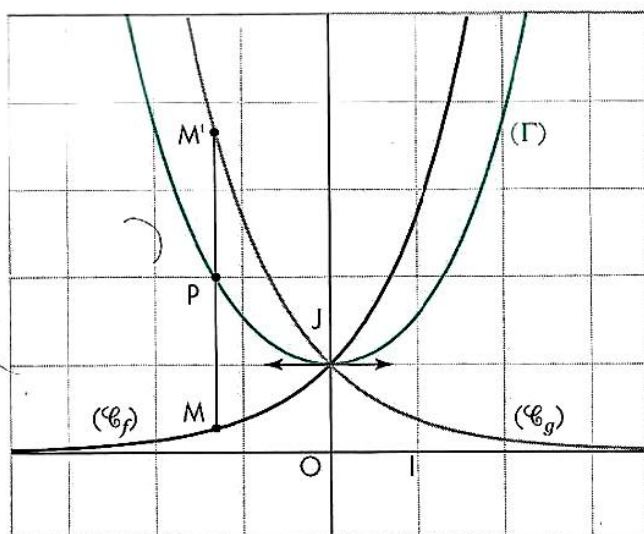
• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x} \right) = +\infty.$$

Donc, (Γ) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

• On déduit de l'étude précédente le tableau de variation de φ et la courbe (Γ) .

La fonction φ est appelée fonction « cosinus hyperbolique » et notée ch .



x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	+
$\varphi(x)$	1	$+\infty$

2. Résolution d'équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2^{2x+3} - 3 \times 2^{x+1} + 1 = 0$.

Solution guidée

- Poser $X = 2^x$ et démontrer que (E) $\Leftrightarrow 8X^2 - 6X + 1 = 0$.
- Conclure.

Exercices

2.a Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto (2x - 3)e^{-3x}$ b) $x \mapsto (x + 1)e^{x^2+2x}$

c) $x \mapsto e^{2x} \ln(x^2 + 1)$ d) $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$.

2.b Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto (2x - 3)e^{x^2-3x}$ b) $x \mapsto \frac{x+1}{e^{x^2+2x}}$

c) $x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2}$ d) $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

2.c Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

a) $x \mapsto xe^x$ b) $x \mapsto xe^{-x}$

c) $x \mapsto (x^2 - 1)e^x$ d) $x \mapsto \frac{e^x}{x}$.

2.d Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

a) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

2.e Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2.f Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $4^{2\ln x - 1} - 5 \times 4^{\ln x} + 16 = 0$

b) $6^{2\sqrt{x}} + 5 \times 6^{1+\sqrt{x}} - 6^3 = 0$.

2.g Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives.

a) $x \mapsto \pi^{2x} + \pi^x - 2$

b) $x \mapsto \ln(2^x - 1)$.

3 Fonctions puissances

3.1. Études des fonctions puissances

Introduction

On a étudié les fonctions $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble de définition de ces fonctions est $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

On a également étudié les fonctions $x \mapsto x^r$ pour $r \in \mathbb{Q}$ (cf. chapitre 11).

L'ensemble de définition de ces fonctions est cette fois $]0; +\infty[$ si $r \geq 0$ et $]0; +\infty[$ si $r < 0$.

Soit α un nombre réel.

On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier les fonctions g_α de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $g_\alpha(x) = x^\alpha$.

g_0 est la restriction à $]0; +\infty[$ de la fonction constante $x \mapsto 1$. Dans la suite de cette étude, on suppose que α est non nul.

Étude de la fonction $g_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

(Γ_α) désigne la courbe représentative de la fonction g_α .

Ensemble de définition

On a : $D_{g_\alpha} =]0; +\infty[$.

Dérivée et sens de variation

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$; donc, la fonction g_α est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction g'_α définie par : $g'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

g'_α est du signe de α ; on distingue deux cas : $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$.

1^{er} cas : $\alpha < 0$

On a : $\forall x \in]0; +\infty[, g'_\alpha(x) < 0$;
donc, g_α est décroissante sur $]0; +\infty[$.

2^e cas : $\alpha > 0$

On a : $\forall x \in]0; +\infty[, g'_\alpha(x) > 0$;
donc, g_α est croissante sur $]0; +\infty[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

1^{er} cas : $\alpha < 0$

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha \ln x = +\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\alpha \ln x} = +\infty$.

La droite (OJ) est asymptote à (Γ_α) .

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = -\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x} = 0$.

La droite (OI) est asymptote à (Γ_α) en $+\infty$.

2^e cas : $\alpha > 0$

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha \ln x = -\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\alpha \ln x} = 0$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = +\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty$.

De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-1)\ln x}$.

Donc, (Γ_α) admet en $+\infty$ une branche parabolique :

- de direction celle de (OI), si $0 < \alpha < 1$;
- de direction celle de (OJ), si $\alpha > 1$.

Tableau de variation

1^{er} cas : $\alpha < 0$

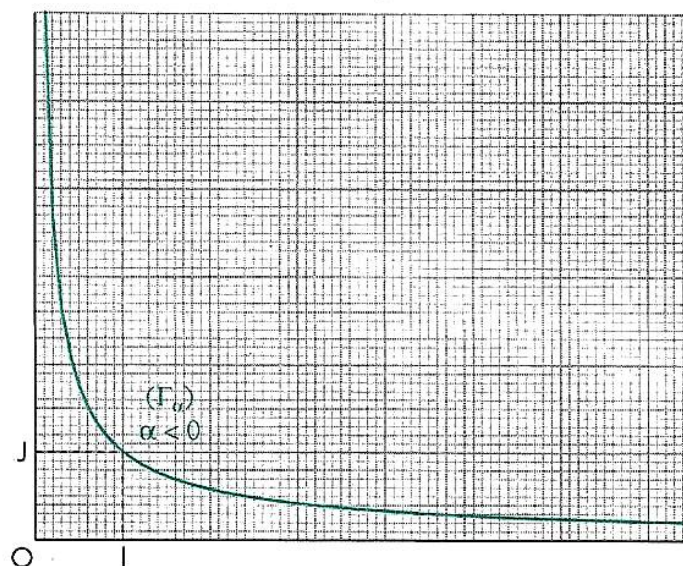
x	0	1	$+\infty$
$g'_\alpha(x)$		-	
$g_\alpha(x)$	$+\infty$	1	0

2^e cas : $\alpha > 0$

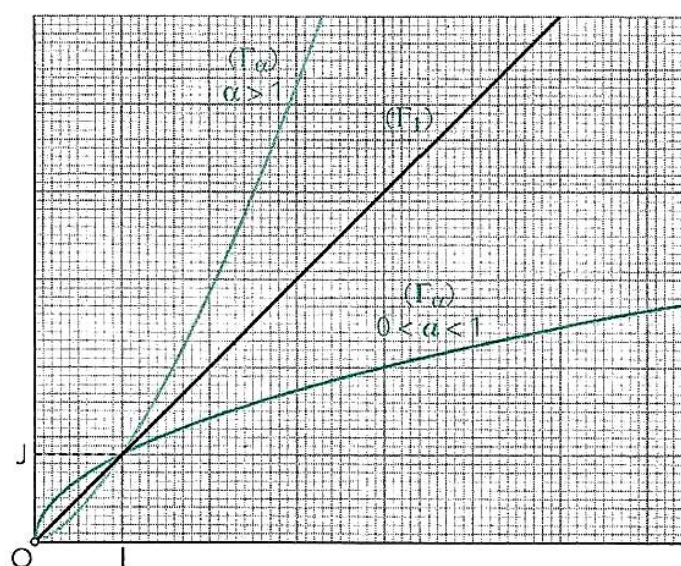
x	0	1	$+\infty$
$g'_\alpha(x)$		+	
$g_\alpha(x)$	0	1	$+\infty$

Courbe représentative

1^{er} cas : $\alpha < 0$



2^e cas : $\alpha > 0$



Remarque

Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction g_α par continuité en 0 ; la courbe représentative de cette nouvelle fonction admet en O une demi-tangente, de support (OI) si $\alpha > 1$ et de support (OJ) si $0 < \alpha < 1$.

Fonction u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Soit α un nombre réel et u une fonction strictement positive sur un intervalle K.

La fonction $x \mapsto [u(x)]^\alpha$ est la composée des fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$.

De plus, on a : $[u(x)]^\alpha = e^{\alpha \ln u(x)}$.

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriété 1

Soit α un nombre réel et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K . La fonction u^α est dérivable sur K et on a : $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

Exemple

La fonction $x \mapsto (\sin x)^\pi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \pi \cos x (\sin x)^{\pi-1}$.

Propriété 2

Soit α un nombre réel différent de -1 , u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K . La fonction $u' u^\alpha$ admet pour primitive sur K la fonction $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exemple

La fonction $x \mapsto 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ admet pour primitive sur $] -1 ; 1[$ la fonction $x \mapsto -\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$.

3.2. Croissance comparée de $\ln x$, e^x , x^α

Limites de référence

Propriétés

Soit α un nombre réel strictement positif. On a :

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 ; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty ; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Démonstration

$$(1) \text{ Posons : } X = x^\alpha ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

$$(2) \text{ Posons : } X = x^\alpha ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} [x^\alpha \ln(x^\alpha)] = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (X \ln X) = 0.$$

$$(3) \text{ Posons : } X = \frac{x}{\alpha} ; \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha^\alpha} \left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}} \right)^\alpha = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha^\alpha} \left(\frac{e^X}{X} \right)^\alpha = +\infty.$$

$$(4) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^\alpha}} = 0.$$

Remarque

Lorsqu'on ne peut conclure directement, on peut conjecturer la limite d'une fonction comportant des fonctions logarithme, puissance ou exponentielle en remarquant que :

- la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction puissance ;
- la fonction puissance « l'emporte » sur la fonction logarithme.

Exemples de calculs de limites

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)}.$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)} = +\infty.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = +\infty.$$

2. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x} e^x$.

Posons : $X = -x$. On a : $\sqrt{1-x} e^x = \sqrt{1+X} e^{-X} = X^{\frac{1}{2}} e^{-X} \times \sqrt{\frac{1}{X} + 1}$.

Or : $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^{\frac{1}{2}} e^{-X} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{X} + 1} = 1$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} e^x = 0$.

3. Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} \ln(\sin x)$.

On a : $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\sqrt{x} \ln(\sin x) = \sqrt{\frac{x}{\sin x}} \times (\sin x)^{\frac{1}{2}} \ln(\sin x)$.

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1$;

de plus, en posant $X = \sin x$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x)^{\frac{1}{2}} \ln(\sin x)] = \lim_{X \rightarrow 0} (X^{\frac{1}{2}} \ln X) = 0$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(\sin x) = 0$.

4. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{2x+1} - e^x}{x^2 - x + 1}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{e^{2x+1} - e^x}{x^2 - x + 1} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{e^{x+1} - 1}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} - 1}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1} - e^x}{x^2 - x + 1} = +\infty$.

3.3. Travaux dirigés

1. Étude d'une fonction du type u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Démontrer que f est continue sur cet ensemble.

c) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2°) Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

Solution

1°) a) On a : $\begin{cases} \frac{x}{x-1} > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$; donc : $D_f =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.

On peut écrire : $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x}{x-1}}$.

b) • Posons : $K =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.

La restriction de f à K est la composée des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{x}{x-1}$ et $f_2 : x \mapsto x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

f_1 est continue et strictement positive sur K ; f_2 est continue sur $f_1(K)$. Donc, f est continue sur K .

• On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0 = f(0)$; donc f est continue en 0.

On en déduit que f est continue sur son ensemble de définition.

c) On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-(-x)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} \times (1-x)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]$.

• Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \left[-(-x)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} \right] = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$; donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0. Cependant, $(\mathcal{C})$ admet en 0 une demi-tangente de support (OJ).

2°) Sens de variation de f

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, f est dérivable sur K et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2(x-1)^2}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}-1}.$$

Donc : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) < 0$; f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$

La droite (Δ_1) d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et $+\infty$.

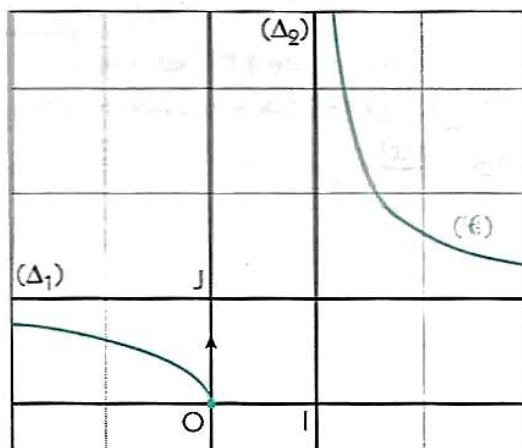
• On a : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty.$

La droite (Δ_2) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	1 $\searrow$		$+\infty \searrow$	1

Courbe représentative



2. Étude d'une fonction du type u^v

Soit la fonction $f: x \mapsto |x^2 - 1|^x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1°) Étudier la dérivabilité de f en 1.

2°) Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

Solution

1°) • On remarque que : $f(1) = 0^1 = 0$.

Lorsque $|x| \neq 1$, on peut écrire : $f(x) = e^{x \ln |x^2 - 1|}$.

On en déduit que : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \frac{f(x) - f(1)}{|x - 1|} = \frac{e^{x \ln |x^2 - 1|}}{e^{\ln |x - 1|}} = e^{x \ln |x^2 - 1| - \ln |x - 1|} = e^{x \ln |x + 1| + (x - 1) \ln |x - 1|}.$

Or : $\lim_{x \rightarrow 1} (x \ln |x + 1|) = \ln 2$ et, en posant $X = |x - 1|$, $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| \ln |x - 1| = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$;

donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{|x - 1|} = 2.$

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2.$

Donc, f admet en 1 pour nombre dérivé à gauche -2 et pour nombre dérivé à droite 2 .

f n'est pas dérivable en 1. Cependant, $(\mathcal{C})$ admet en 1 deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs -2 et 2 .

2°) Dérivée et sens de variation

Soit la fonction $u: x \mapsto x \ln |x^2 - 1|$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et on a : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Or : $u'(x) = \ln |x^2 - 1| + \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ et $e^{u(x)} > 0$; donc, $f'(x)$ est du signe de $u'(x)$.

Étudions les variations de la fonction u' sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

$$u''(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{4x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

On obtient ci-contre le tableau de variation de la fonction u' .

On en déduit le sens de variation de la fonction f .

On a : $f'(0) = 0$;

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) > 0$; donc, f est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$;

$\forall x \in]-1 ; 1[, f'(x) \leq 0$; donc, f est décroissante sur $]-1 ; 1[$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$u''(x)$	-	0	+	-	0	+	-
$u'(x)$	↘ ln2 + 3		↗ 0		↘ ln2 + 3		↗

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln |x^2 - 1| = -\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln |x^2 - 1|} = 0$.

La droite (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln |x^2 - 1| = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln |x^2 - 1|} = +\infty$.

De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln |x^2 - 1|} - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln |x^2 - 1| - \frac{\ln x}{x})}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln |x^2 - 1| - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

(C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

• On a : $\lim_{x \rightarrow -1} x \ln |x^2 - 1| = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow -1} e^{x \ln |x^2 - 1|} = +\infty$.

La droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).

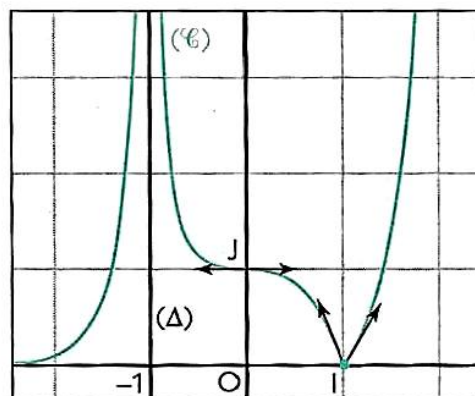
• On a : $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln |x^2 - 1| = -\infty$;

donc : $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x \ln |x^2 - 1|} = 0$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	-	+
$f(x)$	0 ↗ +∞	+∞ ↘ 1	0 ↗ +∞	0 ↗ +∞	+∞

Courbe représentative



Exercices

3.a Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et calculer ses limites aux bornes de cet ensemble.

- a) $x \mapsto (x^2 - 1) e^{\frac{1}{x+1}}$ b) $x \mapsto (x + 1)^{-\frac{1}{3}} \ln x$
c) $x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ d) $x \mapsto (1 + \ln x) e^{-x}$.

3.b Étudier les variations de la fonction $x \mapsto (x^2 - x + 1)^{\frac{2}{3}}$ et tracer sa courbe représentative.

3.c Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$ et tracer sa courbe représentative.

Exercices

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

APPRENTISSAGE

Fonction exponentielle

- 1** Simplifier l'écriture des nombres réels suivants.
- | | | |
|-------------------|-----------------------------|----------------------|
| $a = e^{\ln 3}$ | $b = e^{-\ln 5}$ | $c = e^{2+\ln 3}$ |
| $d = e^{1-\ln 2}$ | $m = e^{\frac{1}{2}-\ln 6}$ | $p = \ln \sqrt{e^5}$ |

- 2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
- | | |
|--------------------|------------------------|
| a) $e^x = -1$ | b) $e^{x+2} = 3$ |
| c) $e^{-2x+3} = 1$ | d) $e^{x^2} = e^{x+2}$ |

- 3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| a) $e^{-x}(e^{2x} - 4) = 0$ | b) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$ |
| c) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ | d) $2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$ |

- 4** Démontrer que le produit des solutions de l'équation $x^{\log x} = 10$ est égal à 1.

- 5** Résoudre les systèmes suivants.
- | | |
|---|--|
| a) $\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$ |

- 6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| a) $e^{-x} \geq 2$ | b) $e^{x^2-1} < 1$ |
| c) $e^{x^2-3} \leq e^{2x}$ | d) $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$ |

- 7** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = 5xe^x$ | b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ |
| c) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ | d) $f(x) = \ln(1 - e^x)$ |
| e) $f(x) = \ln(e^x - x)$ | f) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x+1}}$ |

- 8** Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = e^{2x} - e^x + 4$ | b) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ |
| c) $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ | d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |
| e) $f(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}$ | f) $f(x) = e^{- x }$ |

- 9** Calculer les limites suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin x$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - e^x}$ |

- 10** Calculer les limites suivantes.

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \ln x$ |

Fonctions comportant exp

- 11** Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f , puis déterminer sa fonction dérivée.

- | | |
|---|--------------------------|
| a) $f(x) = e^{-2x+1}$ | b) $f(x) = e^{x^2}$ |
| c) $f(x) = e^{x^2} \ln x$ | d) $f(x) = (1-x)e^{1-x}$ |
| e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | f) $f(x) = x^2 e^{-x}$ |

- 12** Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| a) $f(x) = e^{-4x}$ | b) $f(x) = xe^{x^2}$ |
| c) $f(x) = e^{2x} + 3e^{-x} - 1$ | d) $f(x) = \sin x e^{\cos x}$ |
| e) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$ | f) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ |

- 13** Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction $x \mapsto (ax + b)e^x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (4x - 5)e^x$.

- 14** Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction $x \mapsto (a \cos x + b \sin x)e^x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (3 \cos x + \sin x)e^x$.

- 15** Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{-e^x + 1}{2e^x + 1}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + \frac{b e^x}{2e^x + 1}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

- 16** Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Utiliser la courbe représentative de la fonction exponentielle pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $x \mapsto e^{-x}$ | b) $x \mapsto e^x + 1$ |
| c) $x \mapsto e^{x-1}$ | d) $x \mapsto e^{ x }$ |

- 17** Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4x^2 e^x - 1$.

- Étudier f et tracer sa courbe représentative.
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $4x^2 = e^{-x}$.

- 18** Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \\ f(-1) = f(1) = 0. \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

- Démontrer que f est dérivable à droite en -1 et à gauche en 1 .
- Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

19 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (1-x)(1+e^x)$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

Préciser la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ) .

3. Étudier les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f .

4. Tracer $(\mathcal{C})$.

20 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit la fonction $f: x \mapsto \ln|e^x - 1|$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) Démontrer qu'il existe une fonction ϕ telle que :

$$\forall x \in D, f(x) = x + \phi(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0.$$

c) Compléter l'étude de f et tracer $(\mathcal{C})$.

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$.

a) Démontrer que g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

b) Tracer, sur le même graphique que $(\mathcal{C})$, la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de la réciproque de g .

21 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.

2. Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $y = 1 + e^x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Préciser la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Γ) .

3. Étudier les variations de f et tracer (Γ) et $(\mathcal{C})$.

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $5^x = 1$

b) $(0,1)^x = 10$

c) $3^{2x-1} = 27$

d) $3^x = 2^{-x+3}$

e) $5^{x^2-1} = 125$

f) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{x}} = 16^x$

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $7^{2x} - 5 \times 7^x + 6 = 0$

b) $5^{2x} + 5^x - 2 = 0$

c) $2^{2x+1} + 2^x - 105 = 0$

d) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $4^x < -1$

b) $10^x \leq 100$

c) $(0,5)^x > 8$

d) $7^{x-1} \geq 1$

e) $2^x < 2^{-x}$

f) $3^{x^2-1} \geq 27$

25 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{-2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{\frac{1}{x}}$

26 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = (0,5)^x$

c) $f(x) = 3^{x^2-1}$

d) $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$

Fonctions puissances

27 Déterminer une valeur approchée de chacun des nombres suivants, avec la précision indiquée.

a) $3^{1,7}$ à 10^{-2} près

b) $(1,01)^{\frac{4}{3}}$ à 10^{-5} près

c) $2^{\frac{1}{3}}$ à 10^{-2} près

d) $(1,2)^{-\frac{2}{3}}$ à 10^{-3} près.

28 Soit a un nombre réel strictement positif.

Écrire les nombres suivants sous la forme a^b , où b est un nombre réel.

a) $a^{-2} \times a^{\frac{1}{2}}$

b) $a^{-\frac{1}{3}} \times a^5$

c) $a^{1,07} \times a^{-1,03}$

d) $(a^{-1,2})^{0,5}$

e) $\frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^3}$

f) $a^5 \times \sqrt{a}$

29 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$

b) $f(x) = \frac{2 - x^{0,3}}{x^{\sqrt{2}}}$

30 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

a) $f(x) = x^{0,2}$

b) $f(x) = x^\pi$

31 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} \sqrt{\frac{1}{2}}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.

2. Étudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

32 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = x^{5^x}$

b) $f(x) = x^{0,3} (\ln x)^2$

c) $f(x) = x^2 - \ln x$

d) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^{10}}$

APPROFONDISSEMENT

33 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(x^2 + 1), & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$; démontrer que la parabole (Γ) d'équation $y = -x^2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

3. Compléter l'étude de f et construire (Γ) et $(\mathcal{C})$.

4. a) Déduire de cette étude que $(\mathcal{C})$ coupe (OI) en deux points dont l'un a une abscisse négative que l'on calculera.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse du deuxième point d'intersection.

34 1. Démontrer que pour tous nombres réels a et b , on a : $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

2. a) En déduire que pour tous nombres réels u et v strictement positifs, on a : $\frac{\ln u + \ln v}{2} \leq \ln\left(\frac{u+v}{2}\right)$.

b) Démontrer que pour tous nombres réels u et v , on a : $e^{\frac{u+v}{2}} \leq \frac{e^u + e^v}{2}$.

3. Généralisation

Soit p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1, et tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b positifs, on a : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

(On pourra étudier les variations de la fonction f de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = ax - \frac{x^q}{q}$.)

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

b) En déduire que :

• pour tous nombres réels u et v strictement positifs, on a : $\frac{\ln u}{p} + \frac{\ln v}{q} \leq \ln\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right)$;

• pour tous nombres réels u et v , on a :

$$e^{\frac{u}{p} + \frac{v}{q}} \leq \frac{e^u}{p} + \frac{e^v}{q}.$$

c) Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien, A et B les points de (Γ) d'abscisses respectives u et v .

Interpréter graphiquement la première inégalité du 3.b), en considérant le barycentre K des points pondérés $(A, \frac{1}{p})$ et $(B, \frac{1}{q})$, et le point D de (Γ) de même abscisse que K .

De même, interpréter graphiquement la deuxième inégalité du 3.b).

35 1. Démontrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

En déduire que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

36 Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = |\sin x| \cos x$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Justifier que l'étude de f peut se réduire à $]0; \pi[$.

2. a) Définir le prolongement par continuité g , de f en 0.

b) Étudier la dérivabilité de g en 0.

3. Étudier g et tracer sa courbe représentative (Γ) .

37 Le repère (O, I, J) est orthogonal. L'unité graphique est égale à 2 cm sur (OI) et à 15 cm sur (OJ) .

Soit f_m la famille de fonctions définies par :

$$f_m(x) = \frac{x^m}{m!} e^{-x}, \text{ où } m \text{ est un nombre entier naturel non nul.}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m .

1. a) Démontrer par récurrence sur m que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\forall x \in]0; +\infty[, e^x > \frac{x^m}{m!}\right).$$

En déduire que les parties d'abscisses positives des courbes $(\mathcal{C}_m)$ sont comprises entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

b) Calculer alors la limite de $f_m(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. a) Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m . (On distinguera les cas $m = 1$, m pair et m impair).

b) Dresser les tableaux de variations correspondant à chaque cas.

3. On désigne par A_m le point de $(\mathcal{C}_m)$ dont l'abscisse définit le maximum relatif de f_m .

a) Vérifier que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f_m - f_{m+1} = f_{m-1}$.

Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{m+1})$ et démontrer que ces courbes se coupent en O et A_{m-1} .

b) Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{m+2})$ et démontrer que ces courbes se coupent en O et en un point dont l'abscisse appartient à $[m+1; m+2]$.

4. Utiliser les résultats précédents pour tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$. On précisera les points d'intersection des courbes que la question précédente permet de connaître, ainsi que les tangentes en O à ces différentes courbes.

38 Soit a un nombre réel strictement positif.

On se propose de résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation (E_a) : $a^x = x^a$.

Pour cela, on considère la fonction f_a telle que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f_a(x) = a^x x^{-a}$.

1. On suppose que : $a = e$

a) Étudier les variations de la fonction f_e .

b) Résoudre alors l'équation (E_e) .

c) Démontrer que : $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{x}{\ln x} \geq e$.

2. On suppose que : $0 < a \leq 1$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_a .

b) Résoudre alors l'équation (E_a) .

3. On suppose que : $a > 1$ et $a \neq e$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_a .

b) Déduire des questions 1.c) et 3.a) que la fonction f_a admet un minimum absolu strictement inférieur à 1.

c) En déduire que l'équation (E_a) admet exactement deux solutions situées de part et d'autre du nombre $\frac{a}{\ln a}$.

39 Temps d'effet d'un médicament

On injecte toutes les 8 heures dans le sang d'un malade une quantité q_0 de sérum, exprimée en cm^3 .

Après élimination naturelle, la quantité restante de ce sérum au bout d'un temps t , exprimé en heure, est donnée

par la fonction $t \mapsto q_0 e^{-\frac{t}{24}}$.

1. Calculer, en fonction de q_0 , la quantité restante de sérum dans le sang après 8 heures, 16 heures, 24 heures.

2. Soit q la fonction qui à t associe la quantité totale de sérum contenue dans le sang au bout de ce temps t .

a) Exprimer $q(t)$ en fonction de q_0 et t pour $t \in [0; 48]$. Dans la suite, on suppose que : $q_0 = 1 \text{ cm}^3$.

b) Représenter graphiquement la fonction q dans l'intervalle $[0; 48]$.

3. Le sérum n'est efficace que si le sang en contient en permanence une quantité au moins égale à 2 cm^3 .

Déterminer graphiquement, puis calculer l'instant à partir duquel le sérum sera efficace.

4. a) Déterminer, en fonction de n , la quantité de sérum contenue dans le sang immédiatement après la n -ième injection.

b) La quantité de sérum contenue dans le sang ne doit pas dépasser $3,6 \text{ cm}^3$.

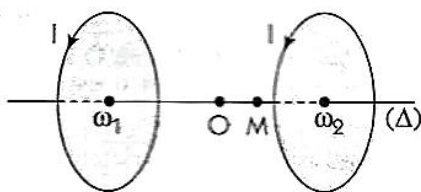
Démontrer que malgré cette restriction, on peut continuer indéfiniment les injections.

40 Bobines de Helmholtz

Le champ magnétique créé par une bobine plate de centre ω et de rayon R , en un point M de l'axe de cette bobine est donné par la formule :

$B = B_0 R^3 (R^2 + \omega M^2)^{-\frac{3}{2}}$, où B_0 désigne le champ magnétique créé en ω .

Pour réaliser un champ magnétique quasi-uniforme, on utilise deux bobines plates circulaires identiques, de centres respectifs ω_1 et ω_2 , de même axe (Δ) et parcourues, dans le même sens, par un courant d'intensité I .



Dans les questions 1, 2 et 3, on suppose que :

$R = 1$, $\omega_1 \omega_2 = 1$ et $B_0 = 1$.

1. Démontrer que le champ magnétique en un point M situé entre ω_1 et ω_2 est donné par la fonction

$$\varphi : x \mapsto \left[1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} + \left[1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

où x désigne l'abscisse de M sur la droite (Δ) munie d'un repère d'origine O , milieu de $[\omega_1 \omega_2]$.

2. Fonctions composantes

Soit les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \left[1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \quad \text{et}$$

$$f_2 : x \mapsto \left[1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

a) Étudier f_1 et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$.

b) En déduire la courbe représentative $(\mathcal{C}_2)$ de f_2 .

c) Démontrer que $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont symétriques par rapport à (OJ) et ont un point commun sur cette droite.

3. Fonction champ magnétique

a) Démontrer que φ est une fonction paire et qu'elle admet en 0 une dérivée nulle.

b) Déduire de la question 2. une représentation graphique (Γ) , point par point, de la fonction φ .

La courbe (Γ) présente au voisinage du point d'abscisse 0 un « quasi-palier », correspondant à un champ magnétique quasi-uniforme.

4. Famille de courbes

On a : $R = 1$ et $B_0 = 1$.

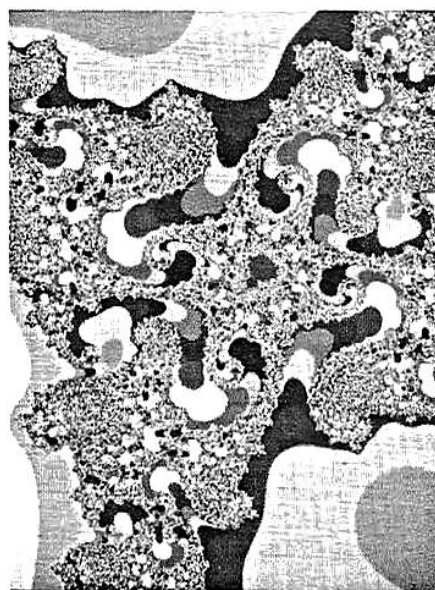
Construire de manière analogue les courbes (Γ) correspondant à : $\omega_1 \omega_2 = 2$; $\omega_1 \omega_2 = 1,4$; $\omega_1 \omega_2 = 0,6$.

On vérifie ainsi graphiquement que le champ magnétique quasi-uniforme est obtenu lorsque $\omega_1 \omega_2 = R$.

Introduction

En classe de première, nous avons abordé les notions de base concernant les suites numériques et étudié plus particulièrement les suites arithmétiques et géométriques. Nous avons également étudié, dans certains cas simples, le comportement à l'infini d'une suite numérique.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place des outils permettant une étude systématique du comportement global d'une suite numérique (monotonie, majoration, minoration, périodicité...), ainsi que de son comportement à l'infini. On étudiera les suites définies par une formule de récurrence et leurs applications, notamment la recherche du point fixe d'une fonction et la méthode de NEWTON permettant la détermination d'une valeur approchée des solutions d'une équation.



© Jean-François Colonna / CNRS.

Fractales.

SOMMAIRE

1. Étude globale d'une suite numérique	276
2. Limite d'une suite numérique	280
3. Compléments sur les suites	286

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variable réelle et le plan est muni du repère (O, I, J) .

1 Étude globale d'une suite numérique

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

En général, une suite numérique (u_n) est déterminée par l'un des procédés suivants :

- une formule explicite permettant de calculer u_n en fonction de n ;
c'est le cas des suites de terme général $n + (-1)^n$ ou $(n+1)e^{-n}$, comme des suites du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique à variable réelle ;

- le premier terme et une formule de récurrence ;
c'est le cas de la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

Lorsque E désigne l'ensemble de définition d'une suite (u_n) , on peut la noter $(u_n)_{n \in E}$.

1.1. Suites bornées

On a vu en classe de première les définitions suivantes.

Définitions

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

- (u_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n élément de E , on a : $u_n \geq m$.
- (u_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n élément de E , on a : $u_n \leq M$.
- (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

On dit que m est un minorant de (u_n) et M un majorant de (u_n) .

Une suite est positive (respectivement négative) si tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).

Exemples

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$; donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq 1$.

On en déduit que la suite (u_n) est bornée.

- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $v_n = \ln(2n+1) - \ln(n+1)$.

La fonction $f: x \mapsto \ln(2x+1) - \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction

$$f': x \mapsto \frac{1}{(2x+1)(x+1)}.$$

La fonction f est donc croissante sur $[0; +\infty[$; de plus, on a : $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \ln 2$; on en déduit que la suite (v_n) est bornée.

- Soit (w_n) la suite définie par : $w_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3}$.

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g: x \mapsto \sqrt{2x+3}$ et (Δ) est la droite d'équation $y = x$.

On en déduit une construction sur (OI) des premiers termes de la suite (w_n) , ce qui permet de conjecturer que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq w_n \leq 3$.

Démontrons ce résultat par récurrence.

– On a : $w_0 = -1$; donc : $-1 \leq w_0 \leq 3$.

– Soit k un entier naturel.

La fonction $g: x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est croissante sur $[-1; 3]$;

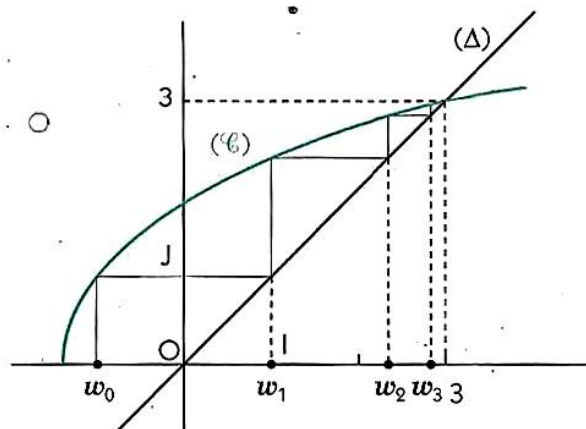
$$\text{donc : } -1 \leq w_k \leq 3 \Rightarrow g(-1) \leq g(w_k) \leq g(3)$$

$$\Rightarrow 1 \leq w_{k+1} \leq 3$$

$$\Rightarrow -1 \leq w_{k+1} \leq 3.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq w_n \leq 3$;

on en déduit que la suite (w_n) est bornée.



Remarque

Certaines suites ne sont pas bornées ; c'est le cas de la suite de terme général $u_n = n^2 - 1$, qui est minorée par -1 , mais n'est pas majorée.

M

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.
- Étudier la fonction f , lorsque la suite est du type : $u_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

1.2. Suites monotones

On a vu en classe de première, les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

- Si pour tout n élément de E $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout n élément de E $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si pour tout n élément de E $u_n = u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est constante.

Remarques

- Si pour tout n élément de E $u_n < u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$), alors la suite (u_n) est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).
- Une suite est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante) à partir d'un certain rang s'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 , on a : $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$).
- Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemples

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} > 0$; donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} > u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $v_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$.

La suite (v_n) est strictement positive et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{2n+2} < 1$; donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} < v_n$.

On en déduit que la suite (v_n) est strictement décroissante.

- Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $w_n = \ln n + \frac{4}{\sqrt{n}}$.

La fonction $f : x \mapsto \ln x + \frac{4}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x}}$.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$.

On en déduit que la suite (w_n) est croissante à partir du rang 4.

- Soit (t_n) la suite définie par : $t_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = e^{t_n}$.

Démontrons par récurrence que cette suite est strictement croissante.

– On a : $t_1 = 1$; donc : $t_1 > t_0$.

– Soit k un entier naturel.

La fonction $g : x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc : $t_{k+1} > t_k \Rightarrow g(t_{k+1}) > g(t_k)$
 $\Rightarrow t_{k+2} > t_{k+1}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} > t_n$; on en déduit que la suite (t_n) est strictement croissante.

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est monotone, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque la suite (u_n) est strictement positive.
- Étudier le sens de variation de la fonction f , lorsque la suite est du type : $u_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

1.3. Suites arithmétiques, suites géométriques

Tableau récapitulatif

On rappelle dans le tableau ci-dessous les principaux résultats, établis en classe de première, concernant les suites arithmétiques et les suites géométriques.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Premier terme	u_0	u_0
Raison	r ($r \in \mathbb{R}$)	q ($q \in \mathbb{R}$)
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q u_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_0 q^n$ $u_n = u_p q^{n-p}$
Somme des n premiers termes ($u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$)	$\frac{n}{2} (u_0 + u_{n-1})$	$u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ ($q \neq 1$)

On a en particulier :

$$\bullet 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \bullet 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} \quad (a \neq 1).$$

Exemples d'utilisation

1. Calculer les sommes : $s_2 = \sum_{k=1}^n k^2$ et $s_3 = \sum_{k=1}^n k^3$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Posons : $s_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

• On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Donc : $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3s_2 + 3s_1 + n \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} k^3 + (n+1)^3 = 1^3 + \sum_{k=2}^n k^3 + 3s_2 + 3s_1 + n$.

On en déduit que : $3s_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Donc : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

Une méthode analogue à celle utilisée pour le calcul de s_2 permet d'écrire :

$\sum_{k=2}^{n+1} k^4 + (n+1)^4 = 1^4 + \sum_{k=2}^n k^4 + 4s_3 + 6s_2 + 4s_1 + n$.

On en déduit que : $4s_3 = (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = n^2(n+1)^2$.

Donc : $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Calculer la somme : $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

On a : $\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$.

Donc : $S_n - \frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$.

Or : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$;

donc : $\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{3+2n}{2^{n+1}}$.

On en déduit que : $S_n = 3 - \frac{3+2n}{2^n}$.

3. Calculer la somme : $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n$ ($n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$).

• Si $x = 1$, on a : $S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

• Si $x \neq 1$, considérons la fonction $f: x \mapsto x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' telle que : $f'(x) = S_n(x)$.

Or, $f(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme x et de raison x ; donc : $f(x) = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x}$.

On en déduit que : $S_n(x) = f'(x) = \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$.

Exercices

1.a Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = -\frac{3}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

Calculer les 5 premiers termes de cette suite et en déduire son ensemble de définition.

1.b Dans chacun des cas suivants, étudier si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, minorée.

a) $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ b) $u_n = n\left(\frac{1}{2} + (-1)^n\right)$

c) $u_n = \frac{2 + \sin n}{3 - \cos n}$ d) $u_n = n \cos^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

1.c 1. Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

a) Conjecturer, à l'aide d'une représentation graphique, si la suite (u_n) est majorée, minorée.
b) Démontrer cette conjecture.

2. Mêmes questions pour la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$.

1.d Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$ b) $u_n = \frac{n^2+2}{n+1}$

c) $u_n = \frac{e^n}{n!}$ d) $u_n = n - \ln(1+n)$.

1.e 1. Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 4$.

a) Conjecturer, à l'aide d'une représentation graphique, le sens de variation de la suite (u_n) .
b) Démontrer cette conjecture.

2. Mêmes questions pour la suite (v_n) définie

par : $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2+3v_n}{2+v_n}$.

1.f 1. Démontrer que si (u_n) est une suite géométrique strictement positive, alors $(\ln u_n)$ est une suite arithmétique.

2. Démontrer que si (u_n) est une suite arithmétique, alors (e^{u_n}) est une suite géométrique.

1.g Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .

2. Calculer $\sum_{n=0}^{25} u_n$.

1.h Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .

2. Calculer $\sum_{n=3}^{10} u_n$.

2

Limite d'une suite numérique

2.1. Notion de limite d'une suite

Limite infinie

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+1}{2} (1 + u_n)$.

Intéressons-nous au comportement de u_n lorsque n prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

- Compléter le tableau ci-dessous.

n	1	2	3	4	5
u_n					

- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{n}{2}$.
- Soit M un nombre réel ; déterminer un nombre réel A tel que : $n \geq A \Rightarrow u_n \geq M$.

On peut donc rendre u_n « aussi grand que l'on veut » en choisissant n « suffisamment grand ».

On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Limite finie

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 - \frac{4}{v_n}$.

Intéressons-nous au comportement de v_n lorsque n prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

- Compléter le tableau ci-dessous (on donnera une valeur approchée de v_n à 10^{-3} près).

n	1	2	3	4	5	6	7
v_n							

- Quelle conjecture ce tableau suggère-t-il ?
- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 2$;
 $\forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2} |v_n - 4|$.
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - 4| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
- Déterminer un nombre réel A tel que : $n \geq A \Rightarrow |v_n - 4| \leq 10^{-5}$.
- Soit ε un nombre réel strictement positif ; déterminer un nombre réel A tel que : $n \geq A \Rightarrow |v_n - 4| \leq \varepsilon$.

On peut donc rendre v_n « aussi proche de 4 que l'on veut » en choisissant n « suffisamment grand ».

On dit que v_n tend vers 4 lorsque n tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$.

Définitions

Les définitions suivantes ont été données en classe de première.

Définitions

- Une suite est convergente si elle a une limite finie.
- Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarques

- On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.
- Certaines suites n'ont pas de limite ; c'est le cas de la suite de terme général : $w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+1}{2} (1 + u_n)$ a pour limite $+\infty$; elle est divergente.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 - \frac{4}{v_n}$ a pour limite 4 ; elle est convergente.
- La suite (w_n) de terme général $w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ n'a pas de limite ; elle est divergente.

2.2. Calculs de limites

Limite d'une suite du type $u_n = f(n)$

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Si f a une limite en $+\infty$, alors (u_n) a une limite et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exemples

- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 1$; donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = n \sin \frac{1}{n}$ converge vers 1.
- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos \frac{1}{x}\right) = +\infty$; donc, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = n \cos \frac{1}{n}$ est divergente.
- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0$; donc, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $w_n = \ln \frac{n^2 + 1}{n^2}$ converge vers 0.

Remarques

La réciproque de cette propriété est fausse.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$; cependant, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sin(\pi n)$, dont tous les termes sont nuls, converge vers 0.

Limites et opérations sur les suites

Les suites numériques sont des cas particuliers de fonctions numériques à variable réelle. On peut donc définir la somme, le produit ou le quotient de deux suites.

Définitions

Soit $(u_n)_{n \in E}$ et $(v_n)_{n \in E}$ deux suites.

- La somme de (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $u_n + v_n$.
- Le produit de (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $u_n v_n$.
- Le quotient de (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ (si pour tout élément n de E , on a $v_n \neq 0$).

Les propriétés concernant les limites de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions numériques à variable réelle, demeurent applicables aux limites de la somme, du produit ou du quotient de deux suites numériques.

Exemples

- Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = e^{-n} + \frac{2n-3}{n+1}$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

- Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $v_n = (n-1)\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 0$; on ne peut donc conclure directement.

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n-1}{n} \times n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Croissances comparées des suites (a^n) , (n^α) et $(\ln n)$

Les résultats concernant les limites des fonctions exponentielles, puissances et logarithme s'appliquent aux suites. On en déduit le tableau suivant.

Suites	Conditions	Limites
Suites géométriques (ou exponentielles) $(a^n)_{n \in \mathbb{N}^*}, a \in \mathbb{R}$	$a \leq -1$ $-1 < a < 1$ $a = 1$ $a > 1$	pas de limite 0 1 $+\infty$
Suites puissances $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $\alpha > 0$	0 1 $+\infty$
Suite logarithme $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$		$+\infty$

De même, les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithme s'appliquent aux suites de types (a^n) , (n^α) et $(\ln n)$.

Propriétés

(1) Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.

(2) Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

(3) Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

Démonstration

(1) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^\alpha}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (cf. chapitre 12, § 3.2.) ; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.

(2) et (3) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{x^\alpha}{a^x}$.

On a : $g(x) = e^{\alpha \ln x - x \ln a}$ et $\alpha \ln x - x \ln a = \alpha x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{\alpha} \right)$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{\alpha} \right) = -\frac{\ln a}{\alpha}$.

• Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x - x \ln a) = -\infty$;

on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

• Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x - x \ln a) = +\infty$;

on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.